ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-3-92-109
УДК 336.763(045)
JEL G11, G12, G17, G32

Новые способы измерения катастрофических финансовых рисков: меры «*VaR* в степени *t*» и их вычисление

В.Б. Минасян
Высшая школа финансов и менеджмента РАНХиГС при Президенте РФ, Москва, Россия
https://orcid.org/0000-0001-6393-145X

АННОТАЦИЯ

Автор предлагает ввести семейство новых мер риска — «*VaR* в степени *t*». **Цель** работы — исследовать свойства данного семейства мер и вывести формулы для их вычисления. В исследовании использованы **методы** оценки финансовых рисков в виде мер риска VaR и ES. В **результате** предложен новый инструмент оценки катастрофических финансовых рисков: «*VaR* в степени *t*». Доказано, что для вычисления $VaR^{(t)}$ достаточно рассчитать обычную меру риска VaR с определенным образом измененной доверительной вероятностью. Автор делает **вывод**, что данное семейство мер может быть полезно в практике риск-менеджмента компаний при решении задачи проникновения в риски событий с малыми вероятностями, но с катастрофическими финансовыми потерями. Результаты данного исследования также могут применяться регулятором для оценки достаточности капитала финансовых институтов. При $t > 1$ эти меры риска катастрофических потерь оказываются более консервативными, чем известные меры риска VaR, ES и GlueVaR.

Ключевые слова: мера риска VaR; мера риска ES; мера риска VaR в квадрате: $VaR^{(2)}$; меры риска *VaR* в степени *t*: $VaR^{(t)}$; меры риска GlueVaR; доверительная вероятность; плотность распределения вероятностей; меры риска искажения; аппетит к риску; субаддитивность; хвосты распределения

Для цитирования: **Минасян В.Б. Новые способы измерения катастрофических финансовых рисков: меры «*VaR* в степени *t*» и их вычисление. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(3):92-109. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-3-92-109**

ORIGINAL PAPER

New Ways to Measure Catastrophic Financial Risks: "*VaR* to the power of *t*" Measures and How to Calculate Them

V.B. Minasyan
Higher School of Finance and Management, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia
https://orcid.org/0000-0001-6393-145X

ABSTRACT

The work introduces a family of new risk measures, "*VaR* to the power of *t*". The **aim** of the work is to study the properties of this family of measures and to derive formulas to calculate them. The study used **methods** for assessing financial risks by risk measures VaR and ES. As a result, the author proposed a new tool to measure catastrophic financial risks — "*VaR* to the power of *t*". The study proved that for the measuring, it is sufficient to calculate the common risk measure VaR with the confidence probability changed in a certain way. The author **concludes** that this family of measures should find application in solving the problem of penetrating risk events with low probabilities, but with catastrophic financial losses. The study results may be of use to the regulator to assess the capital adequacy of financial institutions. If $t > 1$, these measures prove to be more conservative risk measures of catastrophic losses than the known risk measures VaR, ES and GlueVaR.

Keywords: risk measure VaR; risk measure ES; risk measure VaR squared: $VaR^{(2)}$; risk measures *VaR* to the *t* power: $VaR^{(t)}$; risk measures GlueVaR; confidence probability; probability density distribution; distortion risk measures; risk appetite; subadditivity; tails of distribution

For citation: **Minasyan V.B. New ways to measure catastrophic financial risks: "*VaR* to the power of *t*" measures and how to calculate them. *Finance: Theory and Practice.* 2019;24(3):92-109. DOI: 10.26794/2587-5671-2019-24-3-92-109**

ВВЕДЕНИЕ

Практикам, занимающимся управлением финансовыми и страховыми рисками, обычно приходится иметь дело с двумя противоположными требованиями: с одной стороны, они нужны бизнес-единицам для достижения или перевыполнения целей, установленных исполнительным органом компании, но, с другой стороны, они несут ответственность за контроль над экономическими рисками компании. Поиск компромисса между этими двумя требованиями является сложной задачей, с которой каждый день сталкиваются риск-менеджеры. При этом им нужно решать, как риск должен быть определен количественно.

Финансовые институты и страховые компании подчиняются требованиям по капиталу, установленным регулирующими органами, их рекомендациям и директивам. Эти требования обычно равны или пропорциональны значению согласованной с регулирующим органом меры риска и определяют минимальный уровень экономической ликвидности. Поэтому выбор таких мер риска и уровень толерантности имеют решающее значение с точки зрения регулирующих органов.

Финансовые институты и страховые компании предпочитают минимизировать уровень необходимых резервов капитала, требуемых по платежеспособности регуляторами. При этом учитывается, что они должны удовлетворять многим ограничениям в отношении того, как этот капитал может быть инвестирован, так как доходность их капитальных резервов, как правило, ниже, чем та, которая предусмотрена другими возможностями. По этой причине компании, как правило, голосуют за регуляторные правила, устанавливающие меры риска и уровни толерантности, которые не являются чрезмерно консервативными.

Менеджеры также предпочитают простые прямые меры риска в противоположность более сложным альтернативам, поскольку так им легче объяснять смысл применяемых мер риска представителям бизнес-единиц и осуществлять коммуникации с руководством.

С точки зрения регуляторов контроль над рисками финансовых институтов и страховых компаний имеет основополагающее значение для защиты потребителей и инвесторов, которые могут иметь противоречивые цели. Строгие требования к капитальной платежеспособности могут ограничивать возможности компаний с точки зрения реализации тех или иных сделок, а также их объемов. Но они также успокаивают потребителей и гарантируют устойчивое положение финансовой отрасли в экономике. Таким образом, обсуждение вопроса о том, как конструировать подходящую меру риска и что соответствует приемлемому уровню толерантности, невозможно без проведения исследования в отношении того, что может представлять собой соответствующий компромисс и предложения большого набора мер риска, позволяющих достичь данного компромисса в различных, достаточно сложно и тонко настроенных условиях.

Мера риска VaR в настоящее время является классической мерой рыночного риска, получившей большое применение и развитие как в теории, так и на практике (см., например, [1–3]). VaR оценивает пороговый уровень, который не преодолевается в данном (большом) проценте наблюдений в течение данного времени. Согласно решениям Базельского комитета она вошла в качестве обязательной в применении меры риска при оценке не только рыночного риска, но и других рисков (например, кредитного риска и риска ликвидности). Меру риска VaR применяют при оценке различных рисков в корпоративном управлении (см., например, [4–5]).

Ценность под риском (VaR) принята в качестве стандартного инструмента для оценки риска и расчета потребности капитала в финансовой отрасли. Однако известно, что VaR приводит к ряду подводных камней при применении на практике. Недостаток при использовании VaR в финансовом контексте связан с тем, что на основе этой меры риска может быть занижен требуемый капитал в связи с катастрофическими потерями, т.е. необходимые резервы в неблагоприятных сценариях вполне могут быть меньше, чем они должны быть.

Недооценка требуемого капитала может быть усилена при наличии потерь на толстом хвосте, если они неправильно смоделированы с помощью распределений с нетолстым хвостом. Существуют попытки преодоления такого модельного риска при использовании VaR или, по крайней мере, для количественной оценки риска, связанного с моделированием [6].

Второй недостаток заключается в том, что VaR может не удовлетворять свойству субаддитивности. Мера риска субаддитивна, если совокупный риск меньше или равен сумме индивидуальных рисков.

Субаддитивность — привлекательное свойство при агрегировании рисков для сохранения преимуществ диверсификации. Известно, что VaR субаддитивна для эллиптических распределений убытков [7]. Однако субаддитивность VaR не гарантирована для любого распределения, не входящего в класс эллиптических [8, 9].

С конца XX в. достаточное применение и в теории, и в практике риск-менеджмента нашла мера ожидаемого дефицита, условная VaR, мера ожидаемых хвостовых потерь, превышающих VaR, часто обозначаемая ES (иногда ее обозначают TVaR) (см., например, [1–3]).

Мера риска ES измеряет средние потери в наиболее неблагоприятных случаях, а не только максимальные, рассчитанные с учетом толерантности к риску финансового института (доверительной вероятности), как это делает Va R. Поэтому требования капитала, рассчитанные на основе ES, выше, чем на основе Va R. Возникают значительные различия и в размере капитальных резервов в зависимости от того, какая мера риска принята.

Мера риска ES не имеет двух рассмотренных недостатков VaR и как таковая представляется более эффективной для оценки фактических рисков, с которыми сталкиваются компании и финансовые институты. Однако мера риска ES пока не получила широкого признания у специалистов-практиков в финансовой и страховой индустриях. VaR в настоящее время рассматривается как основная мера риска в европейском регулировании платежеспособности.

В относительно недавних работах [10, 11] было предложено и исследовано новое семейство мер риска, названных GlueVaR, в классе мер риска искажения.

Поиск различных мер риска, удовлетворяющих тем или иным потребностям, имеет достаточно длинную историю (общие подходы к данной проблеме, см. [12, 13]). Одним из значительных классов исследуемых мер риска являются меры риска искажения, которые были введены С. Вангом [14, 15]. Они тесно связаны с теорией искажения ожидания.

Обзор того, как можно интерпретировать меры риска с нескольких точек зрения, можно найти в работе A. Tsanakas и E. Desli [16], включая разъяснения о взаимоотношениях между мерами риска искажения и теорией искажения ожидания.

Подробный обзор литературы мер риска искажения доступен и в работах M. Denuit и др., A. Balbas и др. [17, 18].

J. Belles-Sampera и др. [10, 11] исследуют введенное новое семейство мер риска GlueVaR в классе мер риска искажения. Авторы выясняют их связь с мерами риска VaR и ES, получают аналитические выражения замкнутой формы для этих мер, для наиболее часто используемых функций распределения в финансовых и страховых приложениях. Анализ субаддитивности меры риска GlueVaR на хвосте распределения потерь показал, что некоторые меры риска GlueVaR удовлетворяют этому свойству. Предлагается толкование применимости данных мер риска с точки зрения отношения к риску и обсуждается применимость к нефинансовым проблемам. Например, в области здравоохранения, безопасности, охраны окружающей среды или управления катастрофическими рисками.

В работе [19] автор ввел понятие новой меры VaR в квадрате, $VaR^{(2)}$. Она более консервативно оценивает риски, чем VaR и даже ES, как некую пороговую величину, которая не преодолевается с данной вероятностью (как VaR), а не как некоторое среднее значение из множества «плохих», хвостовых значений потерь (как ES). Для этой меры риска были получены замкнутые вычислительные формулы расчета в случаях равномерного и треугольного распределений убытка.

В работе [20] автор продолжил исследование меры риска VaR в квадрате. Для нее была получена общая, не зависящая от распределения убытков формула, выражающая ее через обычную меру VaR, но с измененной определенным образом доверительной вероятностью. Кроме того, были исследованы соотношения между оценками риска, дающими мерой риска $VaR^{(2)}$ и другими известными мерами риска, такими, например, как ES. Выяснилось, что исследуемое соотношение часто зависит от предположения закона распределения убытков, а иногда и от доверительных вероятностей. Но также выяснилось, что чаще всего мера риска $VaR^{(2)}$ дает более консервативную оценку риска, чем ES [20].

Данная работа продолжает развивать описанную серию исследований автора. В ней вводится понятие мер риска VaR в любой степени $t \geq 1$, выводятся формулы, позволяющие свести расчет $VaR^{(t)}$ к вычислению обычной меры VaR с измененной определенным образом доверительной вероятностью. Обсуждаются возможности практического применения данного семейства мер риска.

Таким образом, мы предлагаем новое семейство мер риска, названных $VaR^{(t)}$, приводим для их расчетов формулы, приводящие к тому, что все модели и инструменты, уже наработанные практикой для расчета обычной меры риска VaR, применимы и к расчету любой меры из семейства мер $VaR^{(t)}$. В работе приводятся аналитические выражения замкнутой формы расчета $VaR^{(t)}$ для некоторых наиболее часто используемых в финансовых и страховых приложениях функций распределения. Объясняются взаимоотношения между $VaR^{(t)}$ при $t>1$ и мерами риска VaR и ES.

Это новое семейство мер связано с наиболее популярными мерами риска и включает достаточное количество параметров для учета управленческих и нормативных требований к риску. Поэтому эта статья мотивирована попыткой ответить на следующий вопрос: можно ли разработать меры риска, которые обеспечили бы оценку риска, удовлетворяющую различным потребностям и позволяющую проникновение в оценку рисков сколь угодно высокой катастрофичности, превышающих возможности и VaR, и ES?

Семейство мер риска $VaR^{(t)}$ определяется как функция с двумя параметрами: доверительной вероятности p и показателем степени t. Калибровкой этих параметров меры риска VaR могут быть сопоставлены с большим разнообразием контекстов. В частности, если уровень доверия фиксирован, новое семейство содержит меры риска, которые находятся между VaR и ES и могут адекватно отражать риски средней катастрофичности. Однако в определенных ситуациях могут быть предпочтительны намного более консервативные меры риска, чем даже ES. Мы показываем, что эти крайне консервативные меры риска также могут быть определены с помощью семейства $VaR^{(t)}$. Получаем аналитические выражения замкнутой формы для $VaR^{(t)}$, для обычно используемых в финансовом контексте статистических распределений. Эти выражения должны позволить практикам совершить простой переход от использования VaR и ES к применению мер риска $VaR^{(t)}$.

ПОНЯТИЕ О МЕРАХ РИСКА *VAR* В СТЕПЕНИ *n* (*VaR*$^{(n)}$, *n* — НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО) И ВЫВОД ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ФОРМУЛ

В работе [19] была введена новая мера риска, дополняющая меру VaR, — «VaR в квадрате», ($VaR_p^{(2)}$), отслеживающая хвостовые редко возникающие риски, но связанные с серьезными финансовыми потерями.

Мерой риска *VaR в квадрате* ($VaR_p^{(2)}$) *с доверительной вероятностью p* (см. [19]) называется величина, которую превысит прибыль (не превысят потери), при условии непревышения (превышения) ее пороговой величины VaR_p с доверительной вероятностью p, в течение заданного времени.

В работе [20] выведена формула для вычисления данной меры риска.

Обозначим через X величину случайной прибыли по данному активу в течение заданного промежутка времени ($-X$ показывает величину соответствующих потерь).

В работе [20] доказана следующая формула, позволяющая вычисление меры риска $VaR_p^{(2)}$ свести к вычислению VaR с измененной определенным образом доверительной вероятностью:

$$VaR_p^{(2)}[X] = VaR_{1-(1-p)^2}[X]. \qquad (1)$$

Таким образом, чтобы рассчитать меру риска $VaR_p^{(2)}$, надо просто сосчитать меру риска VaR с доверительной вероятностью $1-(1-p)^2$.

В частности, если известен закон распределения потерь (например, нормальный), то $VaR_p^{(2)}$ можно рассчитать с использованием формулы (1) методом Монте Карло или воспользоваться известной формулой для VaR в этом предположении и формулой (1), что приведет к следующему результату:

$$VaR_p^{(2)} = Vk_{1-(1-p)^2}^{0,1} \cdot \sigma, \qquad (2)$$

где V — ценность позиции в момент 0; σ — стандартное отклонение доходности на временном промежутке, на котором мы оцениваем $VaR_p^{(2)}$; $k_q^{0,1}$ — квантиль стандартизированного распределения доходности с доверительной вероятностью q.

В случае если неизвестно распределение доходностей, $VaR_p^{(2)}$ можно сосчитать, используя эмпирическое распределение потерь и формулу (1).

Следует отметить, что в формуле (2) использована формула расчета относительной VaR, т.е. величины максимального отклонения в неблагоприятном направлении от ожидаемой прибыли с данной вероятностью в течение заданного (единичного) времени.

Понятие $VaR^{(2)}$ в работе [20] было обобщено с учетом того, что доверительная вероятность p' при определении $VaR^{(2)}$, т.е. пороговой величины, которую не превысит прибыль (превысит убыток) при условии непревышения (превышения) VaR_p с вероятностью p', может отличаться от p. Данная мера риска была обозначена $VaR_{p,p'}^{(2)}$ и получена следующая вычислительная формула:

$$VaR^{(2)}_{p,p'}[X] = VaR_{1-(1-p)(1-p')}[X]. \quad (3)$$

Введем понятие мер риска *VaR* в степени *n*, где *n* — любое натуральное число. Мы эти меры будем вводить индуктивно, последовательно, двигаясь от VaR к $VaR^{(2)}$, далее к $VaR^{(3)}$ и так дойдем до определения $VaR^{(n)}$. Параллельно мы займемся последовательным выводом формул для мер риска VaR в степени *n*, $VaR^{(n)}$.

Начнем с того, что обычную VaR представим в виде:

$$VaR^{(1)}_p[X] = VaR_p[X] = VaR_{p_1}[X],$$

$$\text{где } p_1 = 1-(1-p).$$

Тогда, согласно формуле (1)

$$VaR^{(2)}_p[X] = VaR_{p_2}[X], \text{ где } p_2 = 1-(1-p_1)^2.$$

Тогда, естественно, согласно определению считать, что «VaR в кубе» — это всего лишь $VaR^{(2)}_{p_2,p}[X]$. Таким образом, получаем, что

$$VaR^{(3)}_p[X] = VaR^{(2)}_{p_2,p}[X] = VaR_{p_3}[X],$$

где согласно формуле (3) $p_3 = 1-(1-p_2)(1-p)$, но тогда с использованием формулы (1) имеем:

$$p_3 = 1-(1-p_2)(1-p) =$$
$$= 1-(1-[1-(1-p)^2])(1-p) = 1-(1-p)^3.$$

Точно так же, определяя «VaR в четвертой степени» как $VaR^{(2)}_{p_3,p}[X]$, мы получаем:

$VaR^{(4)}_p[X] = VaR^{(2)}_{p_3,p}[X] = VaR_{p_4}[X]$, где согласно формуле (3) $p_4 = 1-(1-p_3)(1-p)$, но тогда с использованием формулы (1) имеем:

$$p_4 = 1-(1-p_3)(1-p) =$$
$$= 1-(1-[1-(1-p)^3])(1-p) = 1-(1-p)^4.$$

Продолжая аналогичным образом, мы введем меру риска «VaR в степени *n*» для любого натурального числа *n* как $VaR^{(2)}_{p_{n-1},p}[X]$, где $p_{n-1} = 1-(1-p)^{n-1}$ и получаем:

$VaR^{(n)}_p[X] = VaR^{(2)}_{p_{n-1},p}[X] = VaR_{p_n}[X]$, где согласно формуле (3) $p_n = 1-(1-p_{n-1})(1-p)$, но тогда с использованием формулы (1) имеем:

$$p_n = 1-(1-p_{n-1})(1-p) =$$
$$= 1-(1-[1-(1-p)^{n-1}])(1-p) = 1-(1-p)^n.$$

Таким образом, мы ввели понятие мер риска «*VaR* в степени *n*» для любого натурального числа *n* и получили формулу, сводящую их вычисления к расчету обычной меры риска VaR с измененной определенным образом доверительной вероятностью.

$$VaR^{(n)}_p[X] = VaR_{1-(1-p)^n}[X]. \quad (4)$$

Чтобы рассчитать меру риска $VaR^{(n)}_p$, надо просто сосчитать меру риска VaR с доверительной вероятностью $1-(1-p)^n$.

С помощью мер риска $VaR^{(n)}_p[X]$ риск-менеджер, последовательно углубляясь в исследование левого хвоста закона распределения прибылей на доверительные вероятности, кратные начальной доверительной вероятности *p*, может получать информацию о все менее вероятных, но более катастрофических рисках.

СЛЕДСТВИЕ

Для любого значения доверительной вероятности $p \in (0,1]$ при неограниченном росте показателя степени *n* значение меры риска $VaR^{(n)}_p[X]$ неограниченно приближается к левой (правой) границе носителя распределения прибыли *X* (убытка –*X*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Это следует из того, что при указанных значениях p $1-(1-p)^n \to 1$, при $n \to \infty$.

В *табл. 1* приведена таблица для расчетных формул для $VaR^{(n)}_p$, при $n = 2, 3$ и 4 и определенных доверительных вероятностях.

Из *табл. 1* видно, что при росте показателя степени *n* доверительная вероятность у соответствующей обычной меры VaR стремится к 100%, причем тем быстрее, чем больше доверительная вероятность, с которой рассчитывается мера риска $VaR^{(n)}_p[X]$. Поэтому и значения меры риска $VaR^{(n)}_p[X]$ быстро приближаются к левой (правой) границе носителя распределения прибыли *X* (убытка –*X*), т.е. отражают потери при все более катастрофических и менее вероятных рисковых событиях.

Протестируем полученные результаты на известных распределениях убытков и соответствующих численных примерах.

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Согласно результатам работы [21], если величина прибыли *X* равномерно распределена в интервале (*a*, *b*), то при любой доверительной вероятности *p*

Таблица 1 / Table 1

Выражение для $VaR_p^{(n)}[X]$ через обычную меру риска VaR при различных значениях *n* и доверительных вероятностей p / Expression for $VaR_p^{(n)}[X]$ through the common risk measure VaR at various values of n and confidence probabilities *p*

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	$VaR_{99\%}[X]$	$VaR_{99,75\%}[X]$	$VaR_{99,99\%}[X]$
$VaR_p^{(3)}[X]$	$VaR_{99,9\%}[X]$	$VaR_{99,9875\%}[X]$	$VaR_{99,9999\%}[X]$
$VaR_p^{(4)}[X]$	$VaR_{99,99\%}[X]$	$VaR_{99,999\%}[X]$	$VaR_{\approx 100\%}[X]$

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 2 / Table 2

Значения $VaR_p^{(n)}[X]$ при различных значениях *n* и *p*, в предположении равномерности распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(n)}[X]$ at various values of *n* and *p*, assuming uniform distribution of variable X at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p[X]$	110	105	101
$VaR_p^{(2)}[X]$	101	100,25	100,01
$VaR_p^{(3)}[X]$	100,1	100,0125	100,0001
$VaR_p^{(4)}[X]$	100,01	100,000625	≈ 100

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

$$VaR_p[X] = pa + (1-p)b.$$

Перепишем это выражение следующим образом:

$$VaR_p[X] = b - (b-a)p = a + (1-p)(b-a).$$

Тогда согласно формуле (4) получаем:

$$VaR_p^{(2)}[X] = VaR_{1-(1-p)^2}[X] =$$

$$= b - (b-a)(1-(1-p)^2) = a + (1-p)^2(b-a)\cdot$$

Заметим, что выражение, естественно, совпало с выражением, полученным с помощью прямолинейного вывода из определения $VaR_p^{(2)}[X]$, выведенном в работе [19] [формула (2)].

Аналогично получаем выражение для $VaR_p^{(n)}[X]$:

$$VaR_p^{(n)}[X] = VaR_{1-(1-p)^n}[X] =$$

$$= b - (b-a)(1-(1-p)^n) = a + (1-p)^n(b-a)\cdot$$

То есть

$$VaR_p^{(n)}[X] = a + (1-p)^n(b-a). \quad (5)$$

Формулу (5) можно переписать и так:

$$VaR_p^{(n)}[X] = (1-(1-p)^n)a + (1-p)^n b,$$

что означает, что величина $VaR_p^{(n)}[X]$ при равномерном распределении прибыли *X* представляется в виде средневзвешенного значения между концами интервала (*a*, *b*), причем вес левого конца интервала стремительно стремится к 1 при росте показателя степени *n*. Поэтому и значение меры риска $VaR_p^{(n)}[X]$ быстро приближается к левой (правой) границе носителя распределения прибыли *X* (убытка –*X*).

Все это проиллюстрировано в *Примере 1 (табл. 2)*.

Пример 1

Рассчитаем $VaR_p^{(n)}[X]$ при *n* = 1, …, 4, *p* = 90%, 95% и 99%, если *a* = 100 ед., а *b* = 200 ед.

ТРЕУГОЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Согласно результатам работы [21] если случайная величина X подчинена треугольному распределению с носителем, совпадающим с интервалом (a, b), и вершиной, проекция которой на носитель представляется точкой $v \in (a, b)$, тогда:

$$VaR_p[X] = \begin{cases} a+\sqrt{(1-p)(b-a)(\nu-a)}, \\ \text{если } \nu \geq pa+(1-p)b \\ b-\sqrt{p(b-a)(b-\nu)}, \\ \text{если } \nu \leq pa+(1-p)b. \end{cases}$$

Перепишем это выражение следующим образом:

$$VaR_p[X] = \begin{cases} a+\sqrt{(1-p)(b-a)(\nu-a)}, \\ \text{если } \nu \geq a+(1-p)(b-a) \\ b-\sqrt{(1-(1-p))(b-a)(b-\nu)}, \\ \text{если } \nu \leq a+(1-p)(b-a). \end{cases}$$

Тогда, так как согласно формуле (4)

$$VaR_p^{(2)}[X] = VaR_{p_2}[X], \text{ где } p_2 = 1-(1-p)^2,$$

мы получаем:

$$VaR_p^{(2)}[X] = \begin{cases} a+\sqrt{(1-p_2)(b-a)(\nu-a)}, \\ \text{если } \nu \geq a+(1-p_2)(b-a) \\ b-\sqrt{(1-(1-p_2))(b-a)(b-\nu)}, \\ \text{если } \nu \leq a+(1-p_2)(b-a) \end{cases}$$

или

$$VaR_p^{(2)}[X] = \begin{cases} a+\sqrt{(1-p)^2(b-a)(\nu-a)}, \\ \text{если } \nu \geq a+(1-p)^2(b-a) \\ b-\sqrt{(1-(1-p)^2)(b-a)(b-\nu)}, \\ \text{если } \nu \leq a+(1-p)^2(b-a). \end{cases}$$

Данное выражение можно записать и в следующем виде:

$$VaR_p^{(2)}[X] = \begin{cases} a+(1-p)\sqrt{(b-a)(\nu-a)}, \\ \text{если } \nu \geq a+(1-p)^2(b-a) \\ b-\sqrt{p(2-p)(b-a)(b-\nu)}, \\ \text{если } \nu \leq a+(1-p)^2(b-a). \end{cases}$$

Заметим, что это выражение, естественно, совпало с выражением, полученным с помощью прямолинейного вывода из определения $VaR_p^{(2)}[X]$, выведенном в работе [19] [формула (2)].

Аналогично получаем выражение для $VaR_p^{(n)}[X]$:

$$VaR_p^{(n)}[X] = VaR_{1-(1-p)^n}[X] =$$
$$= \begin{cases} a+\sqrt{(1-p)^n(b-a)(\nu-a)}, \\ \text{если } \nu \geq a+(1-p)^n(b-a) \\ b-\sqrt{(1-(1-p)^n)(b-a)(b-\nu)}, \\ \text{если } \nu \leq a+(1-p)^n(b-a). \end{cases} \quad (6)$$

Исследуем поведение данных мер риска в зависимости от значений моды распределения ν и доверительной вероятности в *примерах 2–4 (табл. 3–5).*

Пример 2

Рассчитаем $VaR_p^{(n)}[X]$ при $n = 1, \ldots, 4$, p = 90%, 95% и 99%, если $a = 100$ ед., а $b = 200$ ед. и $\nu = 105$ ед.

Пример 3

Рассчитаем $VaR_p^{(n)}[X]$ при $n = 1, \ldots, 4$, p = 90%, 95% и 99%, если $a = 100$ ед., а $b = 200$ ед. и $\nu = 150$ ед.

Пример 4

Рассчитаем $VaR_p^{(n)}[X]$ при $n = 1, \ldots, 4$, $p = 90\%$, 95% и 99%, если $a = 100$ ед., а $b = 200$ ед. и $\nu = 195$ ед.

Мы видим в *примерах 2–4*, что мера риска $VaR_p^{(n)}[X]$ при росте n достаточно быстро стремится к левой границе носителя распределения прибыли, причем чем больше доверительная вероятность p, тем быстрее это происходит. Чем ближе мода распределения ν оказывается к левой границе носителя распределения прибыли, тем быстрее мера риска $VaR_p^{(n)}[X]$ стремится к левой границе носителя распределения прибыли при всех значениях доверительной вероятности p, т.е. тем более рискованной оказывается данная позиция при всех уровнях катастрофичности.

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Как известно (см. например, [1–3]), мера риска VaR (относительное VaR) в предположении нормальности распределения прибыли рассчитывается по формуле

$$VaR_p[X] = V\sigma k_p^{0,1},$$

где V — ценность позиции в момент 0; σ — стандартное отклонение доходности на временном промежутке, на котором мы оцениваем VaR; $k_p^{0,1}$ — квантиль стандартизированного распределения доходности с доверительной вероятностью p.

Таблица 3 / Table 3

Значения $VaR_p^{(n)}[X]$ при различных значениях *n* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(n)}[X]$ at various values of *n* and *p*, assuming triangular distribution of variable *X* at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p[X]$	107,0711	105	102,2361
$VaR_p^{(2)}[X]$	102,2361	101,118	100,2236
$VaR_p^{(3)}[X]$	100,7071	100,25	100,0224
$VaR_p^{(4)}[X]$	100,2236	100,05559	100,0022

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 4 / Table 4

Значения $VaR_p^{(n)}[X]$ при различных значениях *n* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(n)}[X]$ at various values of *n* and *p*, assuming triangular distribution of variable *X* at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p[X]$	122,3607	115,8114	107,0711
$VaR_p^{(2)}[X]$	107,0711	103,5355	100,7071
$VaR_p^{(3)}[X]$	102,2361	100,7906	100,0707
$VaR_p^{(4)}[X]$	100,7071	100,1768	100,0071

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 5 / Table 5

Значения $VaR_p^{(n)}[X]$ при различных значениях *n* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(n)}[X]$ at various values of *n* and *p*, assuming triangular distribution of variable *X* at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p[X]$	130,8221	121,7945	109,7468
$VaR_p^{(2)}[X]$	109,7468	104,8734	100,9747
$VaR_p^{(3)}[X]$	103,0822	101,0897	100,0975
$VaR_p^{(4)}[X]$	100,9747	100,2437	100,0097

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Тогда, согласно формуле (4), мы получаем

$$VaR_p^{(n)}[X] = V\sigma k^{0,1}_{1-(1-p)^n}. \qquad (7)$$

Исследуем поведение данных мер риска в зависимости от доверительной вероятности *p* (*табл. 6*).

Заметим, что так как от доверительной вероятности зависят только квантили, то в примере приводятся именно зависимости соответствующих квантилей от доверительных вероятностей.

Мы видим, что для каждой доверительной вероятности *p* соответствующие квантили при росте *n* меры риска $VaR_p^{(n)}[X]$ возрастают. Таким образом, при больших n меры риска $VaR_p^{(n)}[X]$ оценивают все более катастрофические риски, и чем больше доверительные вероятности p, тем больше оценки таких мер риска.

МЕРЫ РИСКА «ПОЛИ-VAR»

Введем в рассмотрение семейство мер, обобщающих меры $VaR_p^{(n)}[X]$, позволяя доверительным вероятностям, применяемым при построении различных степеней VaR, быть различными.

Начнем с того, что представим обычную меру риска VaR в виде:

$$VaR_p[X] = VaR_{\tilde{p}_1}, \text{ где } \tilde{p}_1 = p_1 = p = 1-(1-p).$$

Воспользовавшись формулой (3), введем понятие меры риска «поли-VaR второй степени»:

$$VaR^{(2)}_{p_1,p_2}[X] = VaR_{\tilde{p}_2}[X], \text{ где } \tilde{p}_2 = \\ = 1-(1-p_1)(1-p_2).$$

Соответственно, мера риска «поли-VaR третей степени» определяется так:

$$VaR^{(3)}_{p_1,p_2,p_3}[X] = VaR^{(2)}_{\tilde{p}_2,p_3}[X] = VaR_{\tilde{p}_3}[X],$$

где

$$\tilde{p}_3 = 1-(1-\tilde{p}_2)(1-p_3) = \\ = 1-(1-[1-(1-p_1)(1-p_2)])(1-p_3) = \\ = 1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3).$$

Продолжая, мера риска «поли-VaR n-й степени» определяется так:

$$VaR^{(n)}_{p_1,p_2,\ldots,p_n}[X] = VaR^{(2)}_{\tilde{p}_{n-1},p_n}[X] = VaR_{\tilde{p}_n}[X],$$

где

$$\tilde{p}_n = 1-(1-\tilde{p}_{n-1})(1-p_n) = \\ = 1-(1-[1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_{n-1})])(1-p_n) = \\ = 1-(1-p_1)\ldots(1-p_n).$$

То есть мы получили такую вычислительную функцию для «поли-VaR n-й степени»:

$$VaR^{(n)}_{p_1,p_2,\ldots,p_n}[X] = VaR_{1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)}[X], \quad (8)$$

выражающую ее через обычную меру риска VaR с пересчитанной определенным образом доверительной вероятностью.

МЕРА РИСКА VAR В ЛЮБОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНИ $t \geq 1$, $VaR_p^{(t)}[X]$

Любое действительное число $t \geq 1$ можно однозначно представить в виде

$t = k + \alpha$, где k — натуральное число; а α — действительное число, причем $0 \leq \alpha < 1$. Очевидно, что k является целой частью числа t, а α является его дробной частью.

Тогда можно определить меру риска VaR в любой действительной степени $t \geq 1$, $VaR_p^{(t)}[X]$ следующим образом:

$$VaR_p^{(t)}[X] = VaR^{(k+1)}_{\underbrace{p,p,\ldots,p}_{k},\alpha p}. \quad (9)$$

В частности, используя (9) и (8), имеем:

$$VaR_p^{(1+\alpha)}[X] = VaR^{(2)}_{p,\alpha p}[X] = VaR_{1-(1-p)(1-\alpha p)}[X] \quad (10)$$

и

$$VaR_p^{(2+\alpha)}[X] = VaR^{(3)}_{p,p,\alpha p}[X] = VaR_{1-(1-p)^2(1-\alpha p)}[X] \quad (11)$$

и т.д.,

$$VaR_p^{(t)}[X] = VaR_p^{(k+\alpha)}[X] = VaR_{1-(1-p)^k(1-\alpha p)}[X]. \quad (12)$$

С помощью мер риска $VaR_p^{(t)}[X]$ риск-менеджер может, последовательно углубляясь в исследование левого хвоста закона распределения прибылей на доверительные вероятности, кратные начальной доверительной вероятности p, а также доли этой вероятности, получать очень детальную информацию о все менее вероятных, но более катастрофических рисках.

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (VAR В НЕЦЕЛОЙ СТЕПЕНИ)

Применяя формулы (10) и (11) в случае равномерного распределения, получаем:

$$VaR_p^{(1+\alpha)}[X] = a + (1-p)(1-\alpha p)(b-a)$$

и

$$VaR_p^{(2+\alpha)}[X] = a + (1-p)^2(1-\alpha p)(b-a).$$

Пример 5 *(см. табл. 7)*

Рассчитаем $VaR_p^{(t)}[X]$ при t = 1; 1,1; 1,5; 1,9 и p = 90%, 95% и 99%, если a = 100 ед., а b = 200 ед.

Пример 6 *(см. табл. 8)*

Таблица 6 / Table 6

Значения $VaR_p^{(n)}[X]$ (через значения соответствующих $k_q^{0.1}$) при различных значениях *n* и *p*, в предположении нормального распределения переменной *X* / Values $VaR_p^{(n)}[X]$ (through values of corresponding $k_q^{0.1}$) at various values of *n* and *p*, assuming normal distribution of variable *X*

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$k_p^{0,1}$ (VaR_p)	1,2816	1,6449	2,3263
$k_{1-(1-p)^2}^{0,1}$ $(VaR_p^{(2)})$	2,3264	2,8070	3,7190
$k_{1-(1-p)^3}^{0,1}$ $(VaR_p^{(3)})$	3,0902	3,6623	4,7534
$k_{1-(1-p)^4}^{0,1}$ $(VaR_p^{(4)})$	3,7190	4,3687	5,6120

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 7 / Table 7

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ при различных значениях *t* и *p*, в предположении равномерности распределения переменной *X* в интервале (*a, b*) / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ at various values of *t* and *p*, assuming uniform distribution of variable *X* at interval (*a, b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p[X]$	110	105	101
$VaR_p^{(1,1)}[X]$	109,1	104,525	100,901
$VaR_p^{(1,5)}[X]$	105,5	102,625	100,505
$VaR_p^{(1,9)}[X]$	101,9	100,725	100,109

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Рассчитаем $VaR_p^{(t)}[X]$ при t = 2; 2,1; 2,5; 2,9 и p = 90%, 95% и 99%, если a = 100 ед., а b = 200 ед.

Из *примеров 5 и 6* видно, что меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$и $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ при росте α стремятся к левой границе носителя распределения прибыли, причем чем больше доверительная вероятность p, тем быстрее это происходит. Однако это происходит медленнее, чем при переходе от $VaR_p[X]$ к $VaR_p^{(2)}[X]$ и, соответственно, от $VaR_p^{(2)}[X]$ к $VaR_p^{(3)}[X]$ (сравните с *примером 1*). То есть, применяя меры риска VaR в степенях $(1+\alpha)$ и $(2+\alpha)$ при различных α, риск-менеджер, в зависимости от аппетита к риску своей компании, может достаточно тонко исследовать риски, таящиеся в левом хвосте распределения прибыли.

ТРЕУГОЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (VAR В НЕЦЕЛОЙ СТЕПЕНИ)

Применяя формулы (10) и (11) в случае равномерного распределения, получаем:

Таблица 8 / Table 8

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ при различных значениях *t* и *p*, в предположении равномерности распределения переменной *X* в интервале (*a, b*) / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ at various values of *t* and *p*, assuming uniform distribution of variable *X* at interval (*a, b*).

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	101	100,25	100,01
$VaR_p^{(2,1)}[X]$	100,9	100,226	100,009
$VaR_p^{(2,5)}[X]$	100,6	100,131	100,005
$VaR_p^{(2,9)}[X]$	100,2	100,036	100,001

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

$$VaR_p^{(1+\alpha)}[X]=\begin{cases}a+\sqrt{(1-p)(1-\alpha p)(b-a)(\nu-a)},\\ \text{если } \nu\geq a+(1-p)(1-\alpha p)(b-a)\\ b-\sqrt{(1-(1-p))(1-\alpha p)(b-a)(b-\nu)},\\ \text{если } \nu\leq a+(1-p)(1-\alpha p)(b-a)\end{cases}$$

и

$$VaR_p^{(2+\alpha)}[X]=$$

$$=\begin{cases}a+\sqrt{(1-p)^2(1-\alpha p)(b-a)(\nu-a)},\\ \text{если } \nu\geq a+(1-p)^2(1-\alpha p)(b-a)\\ b-\sqrt{(1-(1-p)^2(1-\alpha p))(b-a)(b-\nu)},\\ \text{если } \nu\leq a+(1-p)^2(1-\alpha p)(b-a)\end{cases}$$

Пример 7a *(см. табл. 9)*

Рассчитаем $VaR_p^{(t)}[X]$ при *t* = 1; 1,1; 1,5; 1,9 и *p* = 90%, 95% и 99%, если *a* = 100 ед., а *b* = 200 ед. и $\nu=105$ ед.

Пример 7b *(см. табл. 10)*

Рассчитаем $VaR_p^{(t)}[X]$ при *t* = 1;1,1;1,5;1,9 и *p* = 90%, 95% и 99%, если *a* = 100 ед,, а *b* = 200 ед. и $\nu=150$ ед.

Пример 7c *(см. табл. 11)*

Рассчитаем $VaR_p^{(t)}[X]$ при *t* = 1;1,1;1,5;1,9 и *p* = 90%, 95% и 99%, если *a* = 100 ед,, а *b* = 200 ед. и $\nu=195$ ед.

Из *примеров 7a, 7b* и *7c* видно, что меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ при росте α стремятся к левой границе носителя распределения прибыли, причем чем больше доверительная вероятность *p*, тем быстрее это происходит. Однако это происходит медленнее, чем при переходе от $VaR_p[X]$ к $VaR_p^{(2)}[X]$. Причем чем ближе оказывается мода распределения ν к левой границе носителя распределения прибыли, тем быстрее меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ при росте α стремятся к левой границе носителя распределения прибыли при всех *p*. То есть тем более рискованной оказывается данная позиция. Применяя меры риска VaR в степенях $(1+\alpha)$ при различных α, риск-менеджер, в зависимости от аппетита к риску своей компании, может достаточно тонко исследовать риски, таящиеся в левом хвосте распределения прибыли.

Пример 8a *(см. табл. 12)*

Рассчитаем $VaR_p^{(t)}[X]$ при *t* = 2; 2,1; 2,5; 2,9 и *p* = 90%, 95% и 99%, если *a* = 100 ед,, а *b* = 200 ед. и $\nu=105$ ед.

Пример 8b *(см. табл. 13)*

Рассчитаем $VaR_p^{(t)}[X]$ при *t* = 2; 2,1; 2,5; 2,9 и *p* = 90%, 95% и 99%, если *a* = 100 ед,, а *b* = 200 ед. и $\nu=150$ ед.

Пример 8c *(см. табл. 14)*

Рассчитаем $VaR_p^{(t)}[X]$ при *t* = 2; 2,1; 2,5; 2,9 и *p* = 90%, 95% и 99%, если *a* = 100 ед,, *b* = 200 ед. и $\nu=195$ ед.

Из *примеров 8a, 8b* и *8c* видно, что меры риска $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ при росте α стремятся к левой границе носителя распределения прибыли, причем чем больше доверительная вероятность *p*, тем быстрее это происходит. Однако это происходит медленнее, чем при переходе от $VaR_p^{(2)}[X]$ к $VaR_p^{(3)}[X]$. Чем ближе оказывается мода распределения ν к левой границе носителя распределения прибыли, тем быстрее меры риска $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ при росте α стремятся к левой границе носителя распределения прибыли при всех *p*. То есть тем более рискованной оказывается данная позиция. Таким образом, применяя меры риска VaR в степенях $(2+\alpha)$ при различных α, риск-менеджер, в зависимости от аппетита к риску своей компании, может достаточно

Таблица 9 / Table 9

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ при различных значениях *t* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ at various values of *t* and *p*, assuming triangular distribution of variable *X* at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p[X]$	107,5338	105	102,2361
$VaR_p^{(1,1)}[X]$	107,0726	104,7566	102,1225
$VaR_p^{(1,5)}[X]$	105,2503	103,6228	101,5890
$VaR_p^{(1,9)}[X]$	103,0822	101,9039	100,7382

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 10 / Table 10

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ при различных значениях *t* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ at various values of *t* and *p*, assuming triangular distribution of variable *X* at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p[X]$	122,3607	115,8114	107,0711
$VaR_p^{(1,1)}[X]$	121,3007	115,0416	106,7119
$VaR_p^{(1,5)}[X]$	116,5831	111,4564	105,0249
$VaR_p^{(1,9)}[X]$	109,7468	106,0208	102,3345

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 11 / Table 11

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ при различных значениях *t* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ at various values of *t* and *p*, assuming triangular distribution of variable *X* at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p[X]$	130,8221	121,7945	109,7468
$VaR_p^{(1,1)}[X]$	129,4024	120,7334	109,2518
$VaR_p^{(1,5)}[X]$	122,8583	115,7916	106,9264
$VaR_p^{(1,9)}[X]$	113,4350	108,2991	103,2179

Источник / Source: расчеты автора/the author's calculations.

Таблица 12 / Table 12

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ при различных значениях *t* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ at various values of *t* and *p*, assuming triangular distribution of a variable *X* at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	103,0206	101,1180	100,2236
$VaR_p^{(2,1)}[X]$	102,9766	101,0636	100,2125
$VaR_p^{(2,5)}[X]$	102,8005	100,8101	100,1589
$VaR_p^{(2,9)}[X]$	100,9747	100,4257	100,0738

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 13 / Table 13

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ при различных значениях *t* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ at various values of *t* and *p*, assuming triangular distribution of variable *X* at interval (*a*, *b*)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	107,0711	103,5355	100,7071
$VaR_p^{(2,,1)}[X]$	106,7454	103,3634	100,6712
$VaR_p^{(2,5)}[X]$	105,2440	102,5617	100,5025
$VaR_p^{(2,9)}[X]$	103,0822	101,3463	100,2335

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 14 / Table 14

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ при различных значениях *t* и *p*, в предположении треугольного распределения переменной *X* в интервале (*a*, *b*) / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ at various values of *t* and *p*, assuming triangular distribution of variable *X* at interval (a, b)

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	109,7468	104,8734	100,9747
$VaR_p^{(2.1)}[X]$	109,2978	104,6361	100,9252
$VaR_p^{(2.5)}[X]$	107,2284	103,5311	100,6926
$VaR_p^{(2.9)}[X]$	104,2485	101,8557	100,3118

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

Таблица 15 / Table 15

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ (через значения соответствующих $k_q^{0,1}$) при различных значениях *t* и *p*, в предположении нормального распределения переменной *X* / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ (through values of corresponding $k_q^{0,1}$) at various values of t and *p*, assuming normal distribution of variable *X*

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$k_p^{0,1}$ (VaR_p)	1,281552	1,644854	2,326348
$k_{1-(1-p)(1-0,1p)}^{0,1}$ $(VaR_p^{(1,1)})$	1,334622	1,692766	2,365207
$k_{1-(1-p)(1-0,5p)}^{0,1}$ $(VaR_p^{(1,5)})$	1,598193	1,939011	2,572387
$k_{1-(1-p)(1-0,9p)}^{0,1}$ $(VaR_p^{(1,9)})$	2,074855	2,4446632	3,064547

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

тонко исследовать риски, таящиеся в левом хвосте распределения прибыли.

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (VAR В НЕЦЕЛОЙ СТЕПЕНИ)

Применяя формулы (9) и (10) в случае нормального распределения, получаем:

$$VaR_p^{(1+\alpha)}[X] = V\sigma k_{1-(1-p)(1-\alpha p)}^{0,1}$$

и

$$VaR_p^{(2+\alpha)}[X] = V\sigma k_{1-(1-p)^2(1-\alpha p)}^{0,1}.$$

Исследуем поведение данных мер риска в зависимости от доверительной вероятности в *табл. 15* и *16*. Заметим, что так как от доверительной вероятности зависят только квантили, то в примерах приводятся именно зависимости соответствующих квантилей от доверительных вероятностей.

В *табл. 15* и *16* мы видим, что для каждой доверительной вероятности *p* соответствующие квантили возрастают при росте α меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ и $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ возрастают. Таким образом, при больших α эти меры риска достаточно тонко оценивают все более катастрофические риски различного уровня катастрофичности, и чем больше доверительные вероятности *p*, тем больше оценки таких мер риска.

УТОЧНЯЮЩИЕ ОЦЕНКИ РИСКА С ПОМОЩЬЮ МЕРЫ РИСКА «VAR В СТЕПЕНИ» С ПОСТЕПЕННЫМ ДОБАВЛЕНИЕМ ВСЕ БОЛЕЕ МЕЛКИХ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ В СТЕПЕНИ

Предположим, что риск-менеджер оценил риск актива с помощью меры риска $VaR_p(X)$, однако через некоторое время обстоятельства заставили заглянуть чуть дальше в левый хвост распределения прибылей по активу, чтобы уберечься от немного менее часто наблюдаемых опасностей, и он рассчитал меру риска $VaR_p^{(1+\frac{1}{2})}(X)$. Дальнейшие обстоятельства могут заставить заглянуть еще дальше в левый хвост распределения прибылей по активу, чтобы уберечься от еще менее часто наблюдаемых опасностей — и он рассчитал меру риска $VaR_p^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}(X)$. Эта логика может привести к тому, что может представлять практический интерес вычисление и применение в риск-менеджменте мер риска такого вида: $VaR_p^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})}(X)$. Применяя формулу (7), мы получаем следующую формулу, позволяющую рассчитать эти меры риска в виде обычных мер риск VaR со специально подобранной доверительной вероятностью:

$$VaR_p^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})}(X) = VaR_{\tilde{p}_n}, \qquad (13)$$

где

$$\tilde{p}_n = 1-(1-p)(1-\frac{1}{2}p)(1-\frac{1}{3}p)\ldots(1-\frac{1}{n}p). \qquad (14)$$

Нас интересуют вопросы, имеющие и теоретический, и практический смысл: насколько глубоко можно исследовать с помощью таких мер всевозможные риски (катастрофические), которые могут наблюдаться в левом хвосте распределения прибылей по активу? можно ли с помощью данной

Таблица 16 / Table 16

Значения $VaR_p^{(t)}[X]$ (через значения соответствующих $k_q^{0,1}$) при различных значениях *t* и *p*, в предположении нормального распределения переменной *X* / Values $VaR_p^{(t)}[X]$ (through values of corresponding $k_q^{0,1}$) at various values of *t* and *p*, assuming normal distribution of variable *X*

	p = 90%	*p* = 95%	*p* = 99%
$k^{0,1}_{1-(1-p)^2}$ $(VaR_p^{(2)})$	2,326348	2,807034	3,719016
$k^{0,1}_{1-(1-p)^2(1-0,1p)}$ $(VaR_p^{(2,1)})$	2,361524	2,839036	3,74527
$k^{0,1}_{1-(1-p)^2(1-0,5p)}$ $(VaR_p^{(2,5)})$	2,542699	3,008547	3,888177
$k^{0,1}_{1-(1-p)^2(1-0,9p)}$ $(VaR_p^{(2,9)})$	2,894304	3,379946	4,24561

Источник / Source: расчеты автора / the author's calculations.

последовательности мер риска принципиально покрыть на 100% все риски, возможные по данному активу?

Для этого сначала попытаемся исследовать асимптотическое поведение доверительных вероятностей $\tilde{p}_n$ при неограниченно увеличивающейся *n*.

Заметим, что эти вероятности можно представить в виде

$$\tilde{p}_n = 1 - e^{x_n}, \text{ где}$$

$$x_n = \ln[(1-p)(1-\frac{1}{2}p)(1-\frac{1}{3}p)\ldots(1-\frac{1}{n}p)] =$$

$$= \ln(1-p) + \ln(1-\frac{1}{2}p) + \ln(1-\frac{1}{3}p) + \ldots + \ln(1-\frac{1}{n}p).$$

Вспомним, что функция ln(1 + *x*) разлагается в ряд Тейлора вида:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots,$$

сходящийся при всех $x \in (-1,1]$, и применим это разложение к каждому члену выражения для x_n

$$\ln(1-p) = -p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{4}p^4 - \ldots$$

$$\ln(1-\frac{1}{2}p) = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\frac{1}{2^2}p^2 - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3}p^3 - \frac{1}{4}\frac{1}{2^4}p^4 - \ldots$$

$$\ln(1-\frac{1}{3}p) = -\frac{1}{3}p - \frac{1}{2}\frac{1}{3^2}p^2 - \frac{1}{3}\frac{1}{3^3}p^3 - \frac{1}{4}\frac{1}{3^4}p^4 - \ldots$$

и т.д.

$$\ln(1-\frac{1}{n}p) = -\frac{1}{n}p - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}p^2 - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3}p^3 - \frac{1}{4}\frac{1}{n^4}p^4 - \ldots$$

Подставив все эти разложения в выражение для x_n и сделав приведение подобных слагаемых по степеням *p*, получим:

$$x_n = -p(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}) - \frac{p^2}{2}(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}) -$$
$$-\frac{p^3}{3}(1+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}) - \ldots$$
$$-\frac{p^s}{s}(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}) + \ldots$$

Обозначив через

$\varsigma_n(s) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$, при *s* = 1, 2, ..., выражение для x_n можно записать в виде:

$$x_n = -p\varsigma_n(1) - \frac{p^2}{2}\varsigma_n(2) - \frac{p^3}{3}\varsigma_n(3) - \ldots -$$
$$-\frac{p^s}{s}\varsigma_n(s) - \ldots = -\sum_{s=1}^{\infty}\frac{p^s}{s}\varsigma_n(s).$$

Заметим, что величины $\varsigma_n(s)$ являются частичными суммами ряда, определяющего значение знаменитой дзета-функции Римана:

$\varsigma(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, в нашем случае рассматриваемой лишь при натуральных значениях аргумента s. Как известно (см., например, [22]), данная функция принимает конечное значение при $s = 2, 3, \ldots$, однако ее значение бесконечно (ряд расходится) при $s = 1$.

Это означает, что все величины $\varsigma_n(s)$ при $s = 2, 3, \ldots$ стремятся к конечному пределу при $n \to \infty$, однако $\varsigma_n(1)$ стремится к $+\infty$ при $n \to \infty$.

При этом

$$x_n = -p\varsigma_n(1) - \sum_{s=2}^{\infty} \frac{p^s}{s} \varsigma_n(s)$$

и так как $\varsigma_n(s) < \varsigma(s)$, а $\varsigma(s) \le \varsigma(2)$, при $s \ge 2$ получаем

$$\sum_{s=2}^{\infty} \frac{p^s}{s} \varsigma_n(s) < \sum_{s=2}^{\infty} \frac{p^s}{s} \varsigma(s) \le \varsigma(2)(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{p^s}{s} - p) <$$

$$< \varsigma(2)(\sum_{s=1}^{\infty} p^s - p) = \varsigma(2)(\frac{p}{1-p} - p) = \frac{\pi^2}{6} \frac{p^2}{1-p} < \infty.$$

Здесь мы использовали формулу для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, а также знаменитое тождество Эйлера, утверждающее, что $\varsigma(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (см., например, [22]).

Значит $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, а значит, так как $\tilde{p}_n = 1 - e^{x_n}$, получаем, что $\tilde{p}_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Значит, постепенное наращение доверительной вероятности с уменьшающимися вероятностями p, $\frac{1}{2}p, \ldots, \frac{1}{n}p, \ldots$ при расчете мер риска $VaR_p^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})}(X)$ приводит к полному покрытию левого хвоста распределения прибылей актива, а значение этих мер стремится к левому концу носителя распределения вероятностей X.

ВЫВОДЫ

В работе предложено новое семейство мер риска, которое мы называется VaR в степени t, $VaR^{(t)}$. Получены для него выражения, легко применимые на практике, а также аналитические выражения замкнутой формы для многих статистических распределений, которые часто используются в финансовых и страховых приложениях.

Семейство мер $VaR^{(t)}$ может помочь в работе регулирующим органам и практическим риск-менеджерам. Применение мер риска $VaR^{(t)}$ должно улучшить методы регулирования при расчете потребности капитала, поскольку в них может быть включено больше информации об отношении агентов с позициями по риску. Включение качественной информации в инструменты принятия решений имеет важное значение для риск-менеджеров, и как таковые меры риска $VaR^{(t)}$ могут играть ключевую роль в достижении этой цели.

Калибровкой параметров меры риска $VaR^{(t)}$ могут быть сопоставлены с большим разнообразием контекстов. В частности, когда уровень доверия фиксирован, новое семейство содержит меры риска, которые находятся между мерами VaR и ES и могут адекватно отражать риск потерь средней катастрофичности. Однако в определенных ситуациях могут быть предпочтительны более консервативные меры риска, чем даже ES. Мы показываем, что такие крайне консервативные меры риска также могут быть определены с помощью семейства $VaR^{(t)}$. Степень консервативности введенных в работе мер риска $VaR_p^{(t)}[X]$ повышается с ростом t, и при больших значениях $t > 1$ они являются более консервативными по сравнению с известными мерами VaR и ES. Данные меры могут применяться осторожными инвесторами, которые опасаются возможных очень плохих результатов инвестиций, которые хотя и очень маловероятны, но, по их мнению, в данных обстоятельствах вполне возможны. Исследование и оценка таких рисков может осуществляться с помощью последовательного вычисления $VaR_p^{(t)}[X]$ с возрастающими значениями t. Путь расчета мер риска $VaR_p^{(t)}[X]$ будет зависеть от многих предпочтений инвестора, в том числе от его аппетита к риску.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Статья подготовлена в рамках выполнения научно-исследовательской работы 4.10 «Исследование способов измерения рисков на корпоративном и макрофинансовом уровне» государственного задания РАНХиГС 2020 г. Москва, Россия.

ACKNOWLEDGEMENTS

This article is based on the budgetary-supported research 4.10 "Researching Methods for Measuring Risks at the Corporate and Macrofinancial Levels" according to the state task carried out by the RANEPA 2020, Moscow, Russia.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Круи М., Галай Д., Марк Р. Основы риск-менеджмента. Пер. с англ. М.: Юрайт; 2017. 390 с.
2. Hull J.C. Risk management and financial institutions. New York: Pearson Education International; 2007. 576 p.
3. Jorion P. Value at risk: The new benchmark for managing financial risk. New York: McGraw-Hill Education; 2007. 624 p.
4. Лимитовский М.А., Минасян В.Б. Анализ рисков инвестиционного проекта. *Управление финансовыми рисками*. 2011;(2):132–150.
5. Минасян В.Б. Стимулы и моральные риски во взаимоотношениях между принципалом и агентом. *Управление финансовыми рисками*. 2015;(3):172–184.
6. Alexander C., Sarabia J.M. Quantile uncertainty and value-at-risk model risk. *Risk Analysis*. 2012;32(8):1293–1308. DOI: 10.1111/j.1539–6924.2012.01824.x
7. McNeil A., Frey R., Embrechts P. Quantitative risk management: Concepts, techniques, and tools. New York: Princeton University Press; 2005. 538 p. (Princeton Series in Finance).
8. Artzner P., Delbaen F., Eber J-M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance.* 1999;9(3):203–228. DOI: 10.1111/1467–9965.00068
9. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance.* 2002;26(7):1487–1503. DOI: 10.1016/S0378–4266(02)00283–2
10. Belles-Sampera J., Guillén M., Santolino M. Beyond value-at-risk: GlueVaR distortion risk measures. *Risk Analysis.* 2014;34(1):121–134. DOI: 10.1111/risa.12080
11. Belles-Sampera J., Guillén M., Santolino M. GlueVaR risk measures in capital allocation applications. *Insurance: Mathematics and Economics.* 2014;58:132–137. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2014.06.014
12. Szegö G. Measures of risk. *Journal of Banking and Finance.* 2002;26(7):1253–1272. URL: http://www.geocities.ws/smhurtado/MeasuresOfRisk.pdf
13. Szegö G., ed. Risk measures for the 21st century. Chichester: John Wiley & Sons Ltd; 2004. 491 p.
14. Wang S. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazard transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1995;17(1):43–54. DOI: 10.1016/0167–6687(95)00010-P
15. Wang S. Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin.* 1996;26(1):71–92. DOI: 10.2143/AST.26.1.563234
16. Tsanakas A., Desli E. Measurement and pricing of risk in insurance markets. *Risk Analysis.* 2005;25(6):1653–1668. DOI: 10.1111/j.1539–6924.2005.00684.x
17. Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models. Chichester: John Wiley & Sons Ltd; 2005. 440 p.
18. Balbás A., Garrido J., Mayoral S. Properties of distortion risk measures. *Methodology and Computing in Applied Probability.* 2009;11(3):385–399. DOI: 10.1007/s11009–008–9089-z
19. Минасян В.Б. Новая мера риска VaR в квадрате и ее вычисление. Случай равномерного и треугольного распределений убытков. *Управление финансовыми рисками*. 2019;(3):200–208.
20. Минасян В.Б., Новая мера риска VaR в квадрате и ее вычисление. Случай общего закона распределения убытков, сравнение с другими мерами риска. *Управление финансовыми рисками*. 2019;(4):298–320.
21. Минасян В.Б. Модели оценки рисков деятельности компаний, реализующих проекты с НИОКР. *Финансы: теория и практика*. 2019;23(1):133–146. DOI: 10.26794/2587–5671–2019–23–1–133–146
22. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Пер. с нем. М.: Наука; 1977. 344 с.

REFERENCES

1. Crouhy M., Galai D., Mark R. The essentials of risk management. New York: McGraw-Hill Book Co.; 2006. 414 p. (Russ. ed.: Crouhy M., Galai D., Mark R. Osnovy risk-menedzhmenta. Moscow: Urait; 2006. 414 p.).
2. Hull J.C. Risk management and financial institutions. New York: Pearson Education International; 2007. 576 p.
3. Jorion P. Value at risk: The new benchmark for managing financial risk. New York: McGraw-Hill Education; 2007. 624 p.
4. Limitovskii M.A., Minasyan V.B. Investment project risk analysis. *Upravlenie finansovymi riskami.* 2011;(2):132–150. (In Russ.).
5. Minasyan V.B. Incentives and moral risks in the relationship of a principal and an agent. *Upravlenie finansovymi riskami*. 2015;(3):172–184. (In Russ.).

6. Alexander C., Sarabia J.M. Quantile uncertainty and value-at-risk model risk. *Risk Analysis*. 2012;32(8):1293–1308. DOI: 10.1111/j.1539–6924.2012.01824.x
7. McNeil A., Frey R., Embrechts P. Quantitative risk management: Concepts, techniques, and tools. New York: Princeton University Press; 2005. 538 p. (Princeton Series in Finance).
8. Artzner P., Delbaen F., Eber J-M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance.* 1999;9(3):203–228. DOI: 10.1111/1467–9965.00068
9. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance.* 2002;26(7):1487–1503. DOI: 10.1016/S0378–4266(02)00283–2
10. Belles-Sampera J., Guillén M., Santolino M. Beyond value-at-risk: GlueVaR distortion risk measures. *Risk Analysis.* 2014;34(1):121–134. DOI: 10.1111/risa.12080
11. Belles-Sampera J., Guillén M., Santolino M. GlueVaR risk measures in capital allocation applications. *Insurance: Mathematics and Economics.* 2014;58:132–137. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2014.06.014
12. Szego G. Measures of risk. *Journal of Banking and Finance.* 2002;26(7):1253–1272. URL: http://www.geocities.ws/smhurtado/MeasuresOfRisk.pdf
13. Szegö G., ed. Risk measures for the 21st century. Chichester: John Wiley & Sons Ltd; 2004. 491 p.
14. Wang S. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazard transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1995;17(1):43–54. DOI: 10.1016/0167–6687(95)00010-P
15. Wang S. Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin.* 1996;26(1):71–92. DOI: 10.2143/AST.26.1.563234
16. Tsanakas A., Desli E. Measurement and pricing of risk in insurance markets. *Risk Analysis.* 2005;25(6):1653–1668. DOI: 10.1111/j.1539–6924.2005.00684.x
17. Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models. Chichester: John Wiley & Sons Ltd; 2005. 440 p.
18. Balbás A., Garrido J., Mayoral S. Properties of distortion risk measures. *Methodology and Computing in Applied Probability.* 2009;11(3):385–399. DOI: 10.1007/s11009–008–9089-z
19. Minasyan V.B. A new risk measure VaR squered and its calculation. The case of uniform and triangular loss distributions. *Upravlenie finansovymi riskami.* 2019;(3):200–208. (In Russ.).
20. Minasyan V.B. A new risk measure VaR squered and its calculation. The case of the general law of loss distribution, comparison with other risk measures. *Upravlenie finansovymi riskami.* 2019;(4):298–320. (In Russ.).
21. Minasyan V.B. Risk assessment models of the companies implementing R&D projects. *Finansy: teoriya i praktika = Finance: Theory and Practice.* 2019;23(1):133–146. (In Russ.). DOI: 10.26794/2587–5671–2019–23–1–133–146
22. Janke E., Emde F., Lösch F. Tafeln höherer Funktionen. Leipzig: B.G. Teubner Verlag; 1966. 322 p. (Russ. ed.: Janke E., Emde F., Lösch F. Spetsial'nye funktsii. Formuly, grafiki, tablitsy. Moscow: Nauka; 1977. 344 p.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / ABOUT THE AUTHOR

Виген Бабкенович Минасян — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой корпоративных финансов, инвестиционного проектирования и оценки им. М.А. Лимитовского, Высшая школа финансов и менеджмента РАНХ и ГС при Президенте РФ, Москва, Россия

Vigen B. Minasyan — Cand. Sci. (Phis.-Math.), Associate professor, Head of Limitivsky corporate finance, investment design and evaluation department, Higher School of Finance and Management, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia
minasyanvb@ranepa.ru, minasyanvb@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 20.04.2020; после рецензирования 04.05.2020; принята к публикации 11.05.2020.
Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
The article was submitted on 20.04.2020; revised on 04.05.2020 and accepted for publication on 11.05.2020.
The author read and approved the final version of the manuscript.