

## ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ



DOI: 10.26794/2587-5671-2021-25-6-165-184  
 УДК 336.763(045)  
 JEL G11, G12, G17, G32

# Новые меры риска искажения дисперсии и меры катастрофических финансовых рисков

В.Б. Минасян

РАНХиГС при Президенте РФ, Москва, Россия  
<https://orcid.org/0000-0001-6393-145X>

## АННОТАЦИЯ

Меры риска искажения ожидания в последние годы широко используются в финансовых и страховых приложениях благодаря своим привлекательным свойствам. В работах автора были введены два новых класса мер финансовых рисков « $VaR$  в степени  $t$ » и « $ES$  в степени  $t$ ». Также автор исследовал вопрос о принадлежности этих мер риска к классу мер риска искажения ожидания и описал соответствующие функции искажения. **Целью** данной работы является введение нового понятия мер риска искажения дисперсии, которое открывает значительное поле для исследования свойств этих мер риска, которые могут оказаться полезными в приложениях. В работе предложен **метод** поиска новых мер риска искажения дисперсии, которые можно использовать для приобретения мер риска, обладающих особыми свойствами. В **результате** исследования выяснилось, что к классу мер риска искажения дисперсии принадлежат меры риска, определенным образом связанные с мерами « $VaR$  в степени  $t$ » и « $ES$  в степени  $t$ ». В работе описан композитный метод построения новых функций искажения дисперсии и соответствующих мер риска искажения. Этот метод использован для построения большого набора примеров мер риска искажения дисперсии, которые могут найти применение при оценке определенных финансовых рисков катастрофической природы. Автор делает **вывод**, что исследование введенных в работе мер риска искажения дисперсии может быть полезно как для развития теоретических методов риск-менеджмента, так и в практике риск-менеджмента компаний при оценке маловероятных рисков высокой катастрофичности.

**Ключевые слова:** катастрофические финансовые риски; меры риска искажения ожидания; меры риска искажения дисперсии; функции искажения; композитный метод; когерентные меры финансовых рисков; меры риска  $VaR$  в степени  $t$ ; меры риска  $ES$  в степени  $t$

**Для цитирования:** Минасян В.Б. Новые меры риска искажения дисперсии и меры катастрофических финансовых рисков. *Финансы: теория и практика*. 2021;25(6):165-184. DOI: 10.26794/2587-5671-2021-25-6-165-184

## ORIGINAL PAPER

# New Risk Measures for Variance Distortion and Catastrophic Financial Risk Measures

V.B. Minasyan

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia  
<https://orcid.org/0000-0001-6393-145X>

## ABSTRACT

In recent years, expectation distortion risk measures have been widely used in financial and insurance applications due to their attractive properties. The author introduced two new classes of financial risk measures “ $VaR$  raised to the power of  $t$ ” and “ $ES$  raised to the power of  $t$ ” in his works and also investigated the issue of the belonging of these risk measures to the class of risk measures of expectation distortion, and described the corresponding distortion functions. The **aim** of this study is to introduce a new concept of variance distortion risk measures, which opens up a significant area for investigating the properties of these risk measures that may be useful in applications. The paper proposes a **method** of finding new variance distortion risk measures that can be used to acquire risk measures with special properties. As a **result** of the study, it was found that the class of risk measures of variance distortion includes risk measures that are in a certain way related to “ $VaR$  raised to the power of  $t$ ” and “ $ES$  raised to the power of  $t$ ” measures. The article describes the composite method for constructing new variance distortion functions and corresponding distortion risk measures. This **method** is used to build a large set of examples of variance distortion risk measures that can be used in assessing certain financial risks of a catastrophic nature. The author **concludes** that the study of the variance distortion risk measures introduced in this paper can be used both for the development of theoretical risk management methods and in the practice of business risk management in assessing unlikely risks of high catastrophe.

**Keywords:** catastrophic financial risks; expectation distortion risk measures; variance distortion risk measures, distortion functions; composite method; coherent financial risk measures; “ $VaR$  raised to the power of  $t$ ” risk measures; “ $ES$  raised to the power of  $t$ ” risk measures

**For citation:** Minasyan V.B. New risk measures for variance distortion and catastrophic financial risk measures. *Finance: Theory and Practice*. 2021;25(6):165-184. DOI: 10.26794/2587-5671-2021-25-6-165-184

© Минасян В.Б., 2021

## ВВЕДЕНИЕ

Мерой риска мы будем называть отображение  $\rho$  множества случайных переменных  $X$ , связанных с рисковыми портфелями активов и/или обязательств (результативных переменных этих портфелей), в действительную прямую  $R$ . В последующем обсуждении  $X$  будет представляться как величина соответствующих потерь, т.е. положительные значения переменных  $X$  будут представляться как потери, в то время как отрицательные значения представляют прибыль.

Меры риска искажения ожидания представляют собой особую и важную группу мер риска, которые широко используются в финансах и страховании в качестве расчета потребности в капитале и принципов расчета показателей, связанных с аппетитом к риску для регулятора и руководителя компании. Несколько популярных мер риска оказались относящимися к семейству мер риска искажения ожидания. Например, ценность под риском ( $VaR$ ), хвостовая ценность под риском или ожидаемый дефицит ( $ES$ ) (см., например, [1–3]) и мера искажения S. S. Wang [4]. Меры риска искажения ожидания удовлетворяют важнейшим свойствам, которым должна обладать «хорошая» мера риска, включая положительную однородность, трансляционную инвариантность и монотонность (см., например, [5]).

Как было доказано D. Denneberg и S. Wang с J. Dhaene [6, 7], когда соответствующая функция искажения вогнута, мера риска искажения также является субаддитивной.  $VaR$  — одна из самых популярных мер риска, используемых в управлении рисками и банковском надзоре из-за ее вычислительной простоты и по некоторым регуляторным причинам, несмотря на ее недостатки, как меры риска. Например,  $VaR$  не является субаддитивной мерой риска (см., например, [8, 9]). Мера риска  $ES$ , будучи когерентной (см, например, [2, 3]), интересуется только потерями, превышающими  $VaR$ , и игнорирует полезную информацию о распределении потерь ниже  $VaR$ .

L. Zhu и H. Li [10] представили и изучили меру риска искажения, которая была переформулирована F. Yang [11].

В работе C. Yin, D. Zhu [12] авторы, в частности, описали три метода построения мер риска искажения: композитный, способ смешивания и подход на основе теории копул (связок).

Многими исследователями были предложены новые классы мер искажения. Например, в качестве расширения  $VaR$  и  $ES$  в работе J. Belles-Sampera, M. Guillén, M. Santolino [13] был предложен новый класс мер риска искажения, названных мерами риска

GlueVaR, которые могут быть выражены как комбинация показателей  $VaR$  и  $ES$  при различных уровнях доверительных вероятностей. Они получили аналитические выражения замкнутой формы для этих мер при наиболее часто используемых функциях распределения в финансах и страховании. Применение мер риска GlueVaR, связанных с распределением капитала, были рассмотрены в статье [14].

В работе В.Б. Минасяна [15] были введены меры риска  $VaR$  в степени  $t$ , а в [16] доказано, что семейство мер  $VaR$  в степени  $t$  является подмножеством множества мер риска искажения ожидания. То есть всякая мера риска  $VaR$  в степени  $t$ , при любом  $t \geq 1$ , является мерой риска искажения ожидания с определенной функцией искажения. При этом данная функция искажения была предъявлена.

В последней работе также было введено семейство новых мер риска, названных мерами риска « $ES$  в степени  $t$ » ( $ES_p^{(t)}[X]$ ), при любой доверительной вероятности  $p$  и любом действительном  $t \geq 1$ . В работе было исследовано взаимоотношение двух классов мер риска: мер риска искажения ожидания и мер риска  $ES$  в степени  $t$  и было доказано, что семейство мер  $ES$  в степени  $t$  является подмножеством множества мер риска искажения ожидания. То есть что всякая мера риска  $ES$  в степени  $t$ , при любом  $t \geq 1$ , является мерой риска искажения ожидания с определенной функцией искажения. При этом данная функция искажения была предъявлена.

Ясно, что сложно поверить в то, что есть уникальная мера риска, которая может охватывать все характеристики риска. Такой идеальной меры не существует. Более того, поскольку с каждой мерой риска, с риском, по сути, ассоциируется единое число, то каждая конкретная мера не может исчерпать всю информацию о риске. Семейства мер риска  $VaR$  в степени  $t$  и  $ES$  в степени  $t$ , как показано в работах В.Б. Минасяна [15, 16], позволяют исследовать правый хвост распределения потерь с любой необходимой для данного случая точностью, т.е. исследовать хвост распределения настолько тщательно, насколько это необходимо в данных конкретных обстоятельствах. Вообще в процессе исследования разумно искать меры риска, которые идеально подходят для конкретной частной проблемы. Так как все предлагаемые меры риска имеют недостатки и ограничены в применении, выбор соответствующей меры риска продолжает оставаться горячей темой в управлении рисками.

В свете этого развитие новых областей обнаружения новых мер риска, обладающих возможностью точнее оценить конкретные типы катастрофических рисков, учитывая всевозможные необходимые

свойства таких мер, представляется правомерным. В данной работе предпринята попытка предложения нового направления поиска таких мер с соответствующей методологией их поиска. Мы предлагаем новое понятие мер риска искажения дисперсии, которое открывает новую область такого поиска.

### Функции искажения

Функцией искажения является неубывающая функция  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  такая, что  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ . Многие функции искажения  $g$  уже были предложены в литературе. Резюме различных функций искажения, применяемых для построения мер риска искажения ожидания, можно найти в [9, 16].

### Меры риска искажения ожидания

Пусть  $(\Omega, F, P)$  — вероятностное пространство, на котором определены все случайные переменные, представляющие интересующие нас риски. Пусть  $F_x$  — интегральная функция распределения случайной переменной  $X$ , а дуальную функцию распределения обозначим  $\bar{F}_x$ , т.е.  $\bar{F}_x = 1 - F(x) = P\{X > x\}$ . Пусть  $g$  — функция искажения.

Искаженное ожидание случайной переменной  $X$  обозначается  $\rho_g^E[X]$  и определяется, как

$$\rho_g^E[X] = \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_x(x)) dx + \int_{-\infty}^0 [g(\bar{F}_x(x)) - 1] dx, \quad (1)$$

при условии, что, по меньшей мере, один из двух интегралов, указанных выше, является конечным. Если  $X$  неотрицательная случайная переменная, то  $\rho_g^E$  упрощается до

$$\rho_g^E[X] = \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_x(x)) dx.$$

Следует заметить, что данное определение подразумевает, что в случае, когда функция искажения является тождественной функцией, т.е.  $g(x) = x$ , то, как легко проверить, искаженное ожидание совпадает с обычным ожиданием:  $\rho_g^E[X] = E[X]$ .

Вследствие того, что ожидаемое значение случайной величины считается важнейшим способом оценки будущего значения случайной величины  $X$ , естественно предположить, что, так как риски возникают из-за того или иного отклонения значения случайной величины от ее ожидаемого значения, то соответствующие меры риска можно смоделировать в виде соответствующего «искажения» ожидаемого значения с помощью соответствующей функции искажения.

Искаженное ожидание  $\rho_g^E[X]$  называется мерой риска искажения ожидания с функцией искажения  $g$  (см., например, [17]).

Как было замечено в [9], известная мера риска  $VaR$  (см., например, [1–3]) является мерой риска искаженного ожидания, соответствующей функции искажения  $g(x) = 1_{\{x > 1-p\}}$ ,  $p \in (0, 1)$ ,  $\rho_g^E[X] = VaR_p[X]$ .

Меры риска искажения ожидания представляют собой особый класс мер риска, которые были введены D. Denneberg [6] и доработаны S.S. Wang [4, 18].

Меры риска искажения ожидания удовлетворяют множеству свойств, включая положительную однородность, трансляционную инвариантность и монотонность.

Известно (см., [17]), что другой после  $VaR$  мерой риска, которая представляется как мера риска искажения ожидания, являются известная мера  $ES$  — мера ожидаемого дефицита, условная  $VaR$  (см., например, [1–3]). Соответствующей функцией искажения

является  $g(x) = \min\{\frac{x}{1-p}, 1\}$ ,  $p \in [0, 1]$ , и в предположении непрерывности функции распределения

$F_x$  соответствующей мерой риска искажения ожидания является

$$\rho_g^E[X] = ES_p[X].$$

В работе В.Б. Минасяна [16] доказано (см. Предложение 4), что введенные им в работах [15] меры риска  $VaR$  в степени  $t$ ,  $VaR_p^{(t)}[X]$  при любом действительном  $t \geq 1$  являются мерами риска искажения ожидания, причем соответствующую функцию искажения можно описать следующим образом.

Представим число  $t$  в следующем виде:  $t = k + \alpha$ , где  $k$  — натуральное число, а  $\alpha$  — действительное число, причем  $0 \leq \alpha < 1$ . Тогда мера риска  $VaR_p^{(t)}[X]$  будет мерой риска искажения ожидания, которую можно представить в виде суперпозиции функций искажения

$$1_{\{x > 1-p\}}(x), \quad g(x) = \min\{\frac{x}{1-p}, 1\} \\ \text{и } g_\alpha(x) = \min\{\frac{x}{1-\alpha p}, 1\} \text{ и } g_{k-1}(x) = x^{\frac{1}{k-1}}$$

следующими двумя способами:

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}} \underbrace{(g(g(\dots(g(g_\alpha(x)) = 1_{\{x > 1-p\}}(g_{k-1}(g_\alpha(x))),}_{k-1-\text{раз}})$$

т.е.

$$VaR_p^{(t)}[X] = \rho_h^E[X].$$

В работе [16] также доказано (см. Предложение 4), что введенные меры риска  $ES$  в степени  $t$ ,  $ES_p^{(t)}[X]$  при любом действительном  $t \geq 1$  являются мерами риска искажения ожидания, причем соответствующую функцию искажения можно описать следующим образом.

Представим число  $t$  в следующем виде:  $t = k + \alpha$ , где  $k$  — натуральное число, а  $\alpha$  — действительное число, причем  $0 \leq \alpha < 1$ , тогда мера риска  $ES_p^{(t)}[X]$  будет мерой риска искажения ожидания, и она получается как мера риска, соответствующая функции искажения, получаемой в виде суперпозиции функций

$$g(x) = \min\left\{\frac{x}{1-p}, 1\right\}$$

и функции  $g_\alpha(x) = \min\left\{\frac{x}{1-\alpha p}, 1\right\}$  следующего

вида:

$$h(x) = \underbrace{g(g(\dots(g(g_\alpha(x))))}_{k-\text{раз}},$$

$$\text{т.е. } ES_p^{(t)}[X] = \rho_h^E[X].$$

#### Меры риска искажения дисперсии

Самой устоявшейся мерой риска любого фактора риска, представляющегося некоторой случайной величиной  $X$ , является дисперсия данной величины (или ее среднеквадратическое отклонение). Меры риска искажения ожидания возникли путем «искажения» ожидаемого значения  $X$ , и исследование данного класса мер привело к существенному прогрессу в методах оценки катастрофических мер риска. Возникает вопрос: нельзя ли предложить определенным образом «искажать» дисперсию с надеждой на то, что этот подход породит новый класс мер, который можно было бы назвать мерами риска искажения дисперсии. Мы надеемся на то, что они будут обладать богатой структурой, позволяющей в ней находить меры риска, удовлетворяющие определенные потребности риск-менеджеров, не удовлетворенные другими классами мер риска.

Следует заметить, что данное определение должно быть таким, чтобы в случае, когда функция искажения является тождественной функцией, т.е.  $g(x) = x$ , искаженное значение дисперсии, которое мы будем обозначать  $\rho_g^D$ , совпадало с обычной дисперсией случайной величины, т.е.  $\rho_g^D[X] = D[X]$ .

Чтобы привести саму дисперсию к виду, удобному для ее «искажения», преобразуем ее известное выражение:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x).$$

Преобразование, приводимое ниже, справедливо в следующих предположениях:

$$\text{А) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - F_X(x)) = 0.$$

$$\text{В) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 F_X(x) = 0.$$

Предположение А) означает, что  $F_X(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$  с достаточно большой скоростью. Для непрерывных распределений всегда  $F_X(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Но здесь необходимо, чтобы стремление  $F_X(x)$  к 1 происходило быстрее, чем  $x^2$  стремится к бесконечности.

Предположение В) означает, что  $F_X(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$  с достаточно большой скоростью. Для непрерывных распределений всегда  $F_X(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Но здесь необходимо, чтобы стремление  $F_X(x)$  к 0 происходило быстрее, чем  $x^2$  стремится к бесконечности.

Используя интегрирование по частям и предположения А) и В), имеем:

$$\begin{aligned} D[X] &= - \int_{E[X]}^{+\infty} (x - E[X])^2 d(1 - F_X(x)) + \\ &+ \int_{-\infty}^{E[X]} (x - E[X])^2 dF_X(x) = \\ &= -(x - E[X])^2(1 - F_X(x)) \Big|_{E[X]}^{+\infty} + \\ &+ 2 \int_{E[X]}^{+\infty} (1 - F_X(x))(x - E[X]) dx + \\ &+ (x - E[X])^2 F_X(x) \Big|_{-\infty}^{E[X]} - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{E[X]} F_X(x)(x - E[X]) dx = \\ &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} \bar{F}_X(x)(x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [\bar{F}_X(x) - 1](x - E[X]) dx. \end{aligned}$$

Исходя из последнего выражения, вполне естественным является введение следующего определения. Пусть  $g$  — функция искажения.

Искаженная дисперсия случайной переменной  $X$ , соответствующая функции искажения  $g$ , обозначается  $\rho_g^D[X]$  и определяется, как

$$\rho_g^D[X] = 2 \int_{E[X]}^{+\infty} g(\bar{F}_X(x))(x - E[X])dx + \\ + 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [g(\bar{F}_X(x)) - 1](x - E[X])dx. \quad (2)$$

при условии, что, по меньшей мере, один из двух интегралов выше является конечным.

Следует заметить, что когда функция искажения является тождественной функцией, т.е.  $g(x) = x$ , то искаженная дисперсия совпадает с обычной дисперсией:  $\rho_g^D[X] = D[X]$ .

Искаженную дисперсию  $\rho_g^D[X]$  мы будем называть *мерой риска искажения дисперсии с функцией искажения  $g$* .

С использованием определения (2) несложно проверить, что мера риска искажения дисперсии с любой функцией искажения  $g$  от постоянной (не случайной) величины  $X = \text{const} = c$  равна нулю. То есть  $\rho_g^D[c] = 0$ .

#### Нахождение мер риска из класса мер риска искажения дисперсии

Сейчас мы будем искать меры риска, содержащиеся во множестве мер риска искажения дисперсии.

Поиск соответствующих мер мы будем осуществлять с помощью выбора определенной функции искажения и получения вычислительной формулы для меры риска искажения дисперсии, соответствующей данной функции искажения.

Вогнутая функция искажения

$$g(x) = 1_{\{x > 1-p\}}, \quad p \in (0, 1).$$

Данная функция искажения во множестве мер риска искажения ожидания приводила к мере риска  $VaR$  (см. [13]). Интересно, к какой мере риска приведет она же, примененная для построения соответствующей меры риска искажения дисперсии?

Мы здесь и далее будем предполагать непрерывность функции распределения случайной величины  $X$ , представляющей соответствующий фактор риска.

Согласно формуле (2) имеем:

$$\rho_g^D[X] = 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{\bar{F}_X(x) > 1-p\}}(x - E[X])dx + \\ + 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{\bar{F}_X(x) > 1-p\}} - 1](x - E[X])dx = \\ = 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{F_X(x) \leq p\}}(x - E[X])dx +$$

$$2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{F_X(x) \leq p\}} - 1](x - E[X])dx.$$

Обозначая через  $F_X^{-1}$  функцию, обратную к функции распределения  $F_X$ , получаем:

$$\rho_g^D[X] = 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{x \leq F_X^{-1}(p)\}}(x - E[X])dx + \\ + 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{x \leq F_X^{-1}(p)\}} - 1](x - E[X])dx. \quad (3)$$

При дальнейшем выводе формулы для  $\rho_g^D[X]$  нам придется рассмотреть два случая.

А) Предположим, что  $F_X^{-1}(p) < E[X]$ , т.е.  $VaR_p[X] < E[X]$ .

В этом случае очевидно, что первый интеграл в формуле (3) равен нулю. И мы получаем:

$$\rho_g^D[X] = 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{x \leq F_X^{-1}(p)\}} - 1](x - E[X])dx = \\ = -2 \int_{F_X^{-1}(p)}^{E[X]} (x - E[X])dx = -(x - E[X])^2 \Big|_{F_X^{-1}(p)}^{E[X]} = VaR_p[X] = \\ = (VaR_p[X] - E[X])^2.$$

Рассмотрим теперь второй случай.

В) Предположим, что  $F_X^{-1}(p) \geq E[X]$ , т.е.  $VaR_p[X] \geq E[X]$ .

В этом случае очевидно, что второй интеграл в формуле (3) равен нулю. И мы получаем:

$$\rho_g^D[X] = 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{x \leq F_X^{-1}(p)\}}(x - E[X])dx = \\ = 2 \int_{E[X]}^{F_X^{-1}(p)} (x - E[X])dx = (x - E[X])^2 \Big|_{E[X]}^{F_X^{-1}(p)} = VaR_p[X] = \\ = (VaR_p[X] - E[X])^2.$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

#### Предложение 1

Мерой риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения  $g(x) = 1_{\{x > 1-p\}}$ ,  $p \in (0, 1)$ , является мера риска

$$\rho_g^D[X] = (VaR_p[X] - E[X])^2.$$

Заметим, что величина  $\tilde{\rho}_g^D[X] = \sqrt{\rho_g^D[X]}$  также может служить мерой риска, причем ее размерность,

в отличие от  $\rho_g^D[X]$ , совпадает с размерностью случайной величины  $X$ .

Причем, очевидно,

$$\tilde{\rho}_g^D[X] = |VaR_p[X] - E[X]| = |VaR_p^{rel}[X]|,$$

где через  $VaR_p^{rel}[X]$  здесь обозначено относительное значение  $VaR$ , т.е. величина максимально возможного неблагоприятного отклонения случайной величины  $X$  с заданной вероятностью  $p$ .

Вогнутая функция искажения

$$g(x) = \min\left\{\frac{x}{1-p}, 1\right\}, \quad p \in [0, 1].$$

Данная функция искажения во множестве мер риска искажения ожидания приводила к мере риска  $ES$  (см. [17]). Интересно, к какой мере риска приведет она же, примененная для построения соответствующей меры риска искажения дисперсии?

Для того чтобы воспользоваться формулой (2), предварительно преобразуем выражение  $g(\bar{F}_X(x))$ . Мы имеем:

$$\begin{aligned} g(\bar{F}_X(x)) &= \\ &= \min\left\{\frac{\bar{F}_X(x)}{1-p}, 1\right\} = \begin{cases} \frac{\bar{F}_X(x)}{1-p}, & \text{если } \bar{F}_X(x) \leq 1-p, \\ 1, & \text{если } \bar{F}_X(x) > 1-p \end{cases} \end{aligned}$$

или

$$g(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} \frac{1-F_X(x)}{1-p}, & \text{если } F_X(x) > p \\ 1, & \text{если } F_X(x) \leq p, \end{cases}$$

а значит,

$$g(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} \frac{1-F_X(x)}{1-p}, & \text{если } x > F_X^{-1}(p) \\ 1, & \text{если } x \leq F_X^{-1}(p). \end{cases}$$

При дальнейшем выводе формулы для  $\rho_g^D[X]$  нам придется рассмотреть два случая.

А) Предположим, что  $F_X^{-1}(p) < E[X]$ , т.е.  $VaR_p[X] < E[X]$ .

В этом случае первый интеграл в формуле (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{E[X]}^{+\infty} g(\bar{F}_X(x))(x - E[X])dx = \\ & = 2 \int_{E[X]}^{+\infty} \frac{1-F_X(x)}{1-p} (x - E[X])dx. \end{aligned}$$

Второй интеграл в формуле (2) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [g(\bar{F}_X(x)) - 1](x - E[X])dx = \\ & = 2 \int_{F_X^{-1}(p)}^{E[X]} \left[\frac{1-F_X(x)}{1-p} - 1\right](x - E[X])dx. \end{aligned}$$

Поэтому, согласно формуле (2), получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} \frac{1-F_X(x)}{1-p} (x - E[X])dx + \\ & + 2 \int_{F_X^{-1}(p)}^{E[X]} \left[\frac{1-F_X(x)}{1-p} - 1\right](x - E[X])dx = \\ & = 2 \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} \frac{1-F_X(x)}{1-p} (x - E[X])dx - \\ & \quad 2 \int_{F_X^{-1}(p)}^{E[X]} (x - E[X])dx = \\ & = \frac{1}{1-p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} (1-F_X(x))d(x - E[X])^2 - (x - E[X])^2 \Big|_{F_X^{-1}(p)}^{E[X]}. \end{aligned}$$

Тогда, используя интегрирование по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \frac{1}{1-p} (x - E[X])^2 (1 - F_X(x)) \Big|_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} + \\ & + \frac{1}{1-p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x) + (F_X^{-1}(p) - E[X])^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись условием А), получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= -\frac{1}{1-p} (F_X^{-1}(p) - E[X])^2 (1 - F_X(F_X^{-1}(p))) + \\ & \quad + (F_X^{-1}(p) - E[X])^2 + \\ & \quad + \frac{1}{1-p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя очевидное соотношение  $F_X(F_X^{-1}(p)) = p$ , легко увидеть, что сумма первых двух слагаемых в формуле (4) равна нулю, а значит, справедлива формула:

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{1-p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x).$$

Рассмотрим теперь второй случай.

В) Предположим, что  $F_X^{-1}(p) > E[X]$ , т.е.  $VaR_p[X] > E[X]$ .

В этом случае, очевидно, второй интеграл в формуле (2) равен нулю, т.е.

$$2 \int_{-\infty}^{E[X]} [g(\bar{F}_X(x)) - 1](x - E[X])dx = 0.$$

Поэтому, согласно формуле (2), имеем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} g(\bar{F}_X(x))(x - E[X])dx = \\ &= 2 \int_{E[X]}^{F_X^{-1}(p)} (x - E[X])dx + \\ &+ 2 \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} \frac{1 - F_X(x)}{1 - p} (x - E[X])dx = \\ &= (x - E[X])^2 \Big|_{E[X]}^{F_X^{-1}(p)} + \\ &+ \frac{1}{1 - p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} (1 - F_X(x))d(x - E[X])^2. \end{aligned}$$

Тогда, используя интегрирование по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \\ &= (F_X^{-1}(p) - E[X])^2 + \frac{1}{1 - p} (x - E[X])^2 (1 - F_X(x)) \Big|_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} + \\ &+ \frac{1}{1 - p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x). \end{aligned}$$

Воспользовавшись условием А), получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \\ &= (F_X^{-1}(p) - E[X])^2 - \frac{1}{1 - p} (F_X^{-1}(p) - E[X])^2 (1 - F_X(F_X^{-1}(p))) + \\ &+ \frac{1}{1 - p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x). \end{aligned}$$

Используя очевидное соотношение  $F_X(F_X^{-1}(p)) = p$ , легко увидеть, что сумма первых двух слагаемых в формуле (4) равна нулю, а значит, справедлива формула:

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{1 - p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x). \quad (5)$$

Таким образом, мы доказали, что во всех случаях данная мера риска искажения дисперсии представляется формулой (5).

Данную формулу можно записать и в следующем виде:

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{1 - p} \int_{VaR_p[X]}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x). \quad (6)$$

Вспомнив формулу для дисперсии:

$$D[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x)$$

и сравнив ее с формулой (6), а также, учитывая, что  $P\{X > VaR_p[X]\} = 1 - p$ , получаем и такое представление для этой меры риска:

$$\rho_g^D[X] = E[(X - E[X])^2 | X > VaR_p[X]], \quad (7)$$

где  $E[Y|A]$  обозначает условное ожидаемое значение случайной величины  $Y$ , при условии реализации случайного события  $A$ .

Или, если определить условную дисперсию, при условии  $X > VaR_p[X]$  выражением:

$$D[X | X > VaR_p[X]] = E[(X - E[X])^2 | X > VaR_p[X]],$$

получаем следующее представление для этой меры риска искажений дисперсии:

$$\rho_g^D[X] = D[X | X > VaR_p[X]]. \quad (8)$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

### Предложение 2

а) мерой риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения

$$g(x) = \min\left\{\frac{x}{1 - p}, 1\right\}, \quad p \in [0, 1],$$

является мера риска

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{1 - p} \int_{VaR_p[X]}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x);$$

б) эту меру риска также можно представить в виде

$$\rho_g^D[X] = D[X | X > VaR_p[X]],$$

где

$$D[X | X > VaR_p[X]] = E[(X - E[X])^2 | X > VaR_p[X]].$$

То есть эта мера риска потерь представляет условную дисперсию случайного фактора  $X$ , представляющего риск, при условии, что величина данных потерь превысила величину  $VaR_p[X]$ .

Как известно, меру риска  $ES$ , в случае непрерывности функции распределения случайной величины  $X$ , также можно представить двумя способами:

$$ES_p[X] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_q[X] dq \quad (9)$$

и

$$ES_p[X] = E[X | X > VaR_p[X]]. \quad (10)$$

Сравнивая формулу (10) и представление нашей новой меры риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$  в пункте б) Предложения 2, мы видим, что в классе мер риска искажения дисперсии новая мера риска  $\rho_g^D[X]$  имеет ту же значимость, что и мера  $ES_p[X]$  в классе мер риска искажения ожидания.

Отсюда можно сделать вывод, что значимость данной меры для теории и практики риск-менеджмента может быть не меньше значимости меры риска  $ES$ .

И еще, глядя на формулу (9), хотелось бы иметь формулу для нашей меры риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$  в форме, аналогичной формуле (9) для меры риска  $ES$ .

Можно доказать справедливость следующего утверждения.

### Предложение 3

Меру риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$ , соответствующую функции искажения

$$g(x) = \min\left\{\frac{x}{1-p}, 1\right\}, \quad p \in [0, 1],$$

можно представить в виде:

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 (VaR_q^{rel}[X])^2 dq, \quad (11)$$

где

$VaR_q^{rel}[X] = VaR_q[X] - E[X]$ , значение соответствующей относительной меры риска  $VaR$ .

### Доказательство

Согласно формуле (6) имеем:

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{1-p} \int_{VaR_p[X]}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x).$$

Совершим в данном интеграле замену переменной:  $x = F_X^{-1}(q) = VaR_q[X]$  с учетом того, что при

$q = 1$  переменная  $x$  принимает значение  $+\infty$ , а при  $q = p$  переменная  $x$  принимает значение  $VaR_p[X]$ . Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 (VaR_q[X] - E[X])^2 dq = \\ &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 (VaR_q^{rel}[X])^2 dq. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Заметим, что величина  $\tilde{\rho}_g^D[X] = \sqrt{\rho_g^D[X]}$  также может служить мерой риска, причем ее размерность, в отличие от  $\rho_g^D[X]$ , совпадает с размерностью случайной величины  $X$ .

Из Предложения 2 следует, что данная мера риска искажения дисперсии представляет собой новую меру катастрофических рисков.

Представляет интерес сравнение оценок риска, полученных с помощью данной меры и меры риска искажения дисперсии, полученной в предыдущем рассмотрении с помощью функции искажения  $g(x) = 1_{\{x > 1-p\}}$ ,  $p \in (0, 1)$ .

Можно доказать следующее утверждение.

### Утверждение 1

Справедливо следующее неравенство:

$$\rho_g^D[X] \geq (VaR_p[X] - E[X])^2,$$

а значит, и

$$\tilde{\rho}_g^D[X] \geq |VaR_p[X] - E[X]| = |VaR_p^{rel}[X]|,$$

где через  $VaR_p^{rel}[X]$  здесь обозначено относительное значение  $VaR$ , т.е. величину максимально возможного неблагоприятного отклонения случайной величины  $X$  с заданной вероятностью  $p$ .

### Доказательство

Из формулы (6), очевидно, следует неравенство

$$\rho_g^D[X] \geq \frac{(VaR_p[X] - E[X])^2}{1-p} \int_{VaR_p[X]}^{+\infty} dF_X(x).$$

Однако

$$\int_{VaR_p[X]}^{+\infty} dF_X(x) = F_X(+\infty) - F_X(F_X^{-1}(p)) = 1 - p.$$

Откуда следует справедливость требуемого неравенства:

$$\rho_g^D[X] \geq (VaR_p[X] - E[X])^2,$$

а значит, и

$$\tilde{\rho}_g^D[X] \geq |VaR_p[X] - E[X]| = |VaR_p^{rel}[X]|.$$

Утверждение доказано.

Смысл данного утверждения в том, что данная мера риска искажения дисперсии всегда дает оценки риска, превышающие (или равные) оценки риска, полученные с помощью первой предложенной нами меры риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения

$$g(x) = 1_{\{x > 1-p\}}, \quad p \in (0, 1).$$

### КОМПОЗИТНЫЙ МЕТОД СОЗДАНИЯ НОВЫХ ФУНКЦИЙ ИСКАЖЕНИЯ И МЕР РИСКА ИСКАЖЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

Функции искажения могут рассматриваться как отправная точка для построения семейства мер риска искажения. Таким образом, построение и выбор функций искажения играют важную роль в разработке различных семейств мер риска с различными свойствами. В работе С. Yin, D. Zhu [12] рассматриваются три метода: композитный метод, способы смешивания и копулы, которые позволяют построить новые классы функций и мер риска искажения с использованием имеющихся в распоряжении функций и мер искажения.

Мы в данной работе будем обсуждать и развивать лишь первый из них — композитный метод и применять его для получения новых мер риска искажения дисперсии.

В композитном методе для построения новых функций искажения применяется композиция функций искажения.

Пусть  $h_1, h_2, \dots$  являются функциями искажения, определим  $f_1(x) = h_1(x)$  и сложные функции  $f_n(x) = f_{n-1}(h_n(x))$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Легко проверить, что  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  также являются функциями искажения. Если  $h_1, h_2, \dots$  вогнутые функции искажения, тогда каждая  $f_n(x)$  вогнута, и они удовлетворяют условиям:

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$$

Теперь мы будем строить функции искажения, используя композитный метод, в виде суперпозиции известных функций искажения, которые приводили к построению интересных мер риска искажения ожидания. Мы будем надеяться, что в применении их к построению мер риска искажения дисперсии можно будет построить новые меры риска с интересными свойствами.

Примеры мер риска искажения дисперсии, получаемые с помощью композитного метода

**Пример 1.** Рассмотрим выпуклую функцию

искажения  $g(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$  и функцию искажения, по-

лучаемого в виде следующей суперпозиции функций искажения:

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}}(g(x)).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} h(x) &= 1_{\{g(x) > 1-p\}}(x) = 1_{\{x > \ln(1+(e-1)(1-p))\}}(x) = \\ &= 1_{\{x > 1 - (1 - \ln(1+(e-1)(1-p)))\}}(x). \end{aligned}$$

Тогда с помощью *Предложения 1* из последнего выражения следует формула для меры риска искажения дисперсии, соответствующей данной функции искажения  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} \rho_h^D[X] &= (VaR_{1 - \ln(1+(e-1)(1-p))}[X] - E[X])^2 = \\ &= (VaR_{1 - \ln(1+(e-1)(1-p))}^{rel}[X])^2, \end{aligned}$$

где через  $VaR_{1 - \ln(1+(e-1)(1-p))}^{rel}[X]$  обозначена соответствующая мера относительной величины  $VaR$ .

При  $p = 0,95$  получаем  $\rho_h^D[X] = (VaR_{0,032}^{rel}[X])^2$ .

**Пример 2.** Рассмотрим вогнутую функцию

искажения  $g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$  и функцию искажения,

получаемого в виде следующей суперпозиции функций искажения:

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}}(g(x)).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} h(x) &= 1_{\{g(x) > 1-p\}}(x) = 1_{\{x > \frac{2}{\pi} \arcsin(1-p)\}}(x) = \\ &= 1_{\{x > 1 - (1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1-p))\}}(x). \end{aligned}$$

Тогда, с помощью *Предложения 1*, из последнего выражения следует формула для меры риска искажения дисперсии, соответствующей данной функции искажения  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} \rho_h^D[X] &= (VaR_{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1-p)}[X] - E[X])^2 = \\ &= (VaR_{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(1-p)}^{rel}[X])^2, \end{aligned}$$

где через  $VaR_{1-\frac{2}{\pi} \arcsin(1-p)}^{rel}[X]$  обозначена соответствующая мера относительной величины  $VaR$ .

При  $p = 0,95$  получаем  $\rho_h^D[X] = (VaR_{0,9682}^{rel}[X])^2$ .

**Пример 3.** Рассмотрим вогнутую функцию

искажения  $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$  и функцию искажения,

получаемого в виде следующей суперпозиции функций искажения:

$$h(x) = 1_{\{x>1-p\}}(g(x)).$$

Очевидно, что

$$h(x) = 1_{\{g(x)>1-p\}}(x) = 1_{\{x>2^{1-p}-1\}}(x) = 1_{\{x>1-(2-2^{1-p})\}}(x).$$

Тогда с помощью *Предложения 1* из последнего выражения следует формула для меры риска искажения дисперсии, соответствующей данной функции искажения  $h(x)$ :

$$\rho_h^D[X] = (VaR_{2-2^{1-p}}[X] - E[X])^2 = (VaR_{2-2^{1-p}}^{rel}[X])^2,$$

где через  $VaR_{2-2^{1-p}}^{rel}[X]$  обозначена соответствующая мера относительной величины  $VaR$ .

При  $p = 0,95$  получаем  $\rho_h^D[X] = (VaR_{0,97}^{rel}[X])^2$ .

**Пример 4.** Рассмотрим вогнутую функцию искажения  $g(x) = x^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  и функцию искажения, получаемого в виде следующей суперпозиции функций искажения:

$$h(x) = 1_{\{x>1-p\}}(g(x)).$$

Очевидно, что

$$h(x) = 1_{\{g(x)>1-p\}}(x) = 1_{\{x>(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}\}}(x) = 1_{\{x>1-(1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}})\}}(x).$$

Тогда с помощью *Предложения 1* из последнего выражения следует формула для меры риска искажения дисперсии, соответствующей данной функции искажения  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} \rho_h^D[X] &= (VaR_{1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}}[X] - E[X])^2 = \\ &= (VaR_{1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}}^{rel}[X])^2, \end{aligned}$$

где через  $VaR_{1-(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}}^{rel}[X]$  обозначена соответствующая

мера относительной величины  $VaR$ .

При  $\alpha = \frac{1}{2}$  и  $p = 0,95$  получаем  $\rho_h^D[X] = (VaR_{0,9975}^{rel}[X])^2$ .

**Пример 5.** Рассмотрим вогнутую функцию искажения  $g(x) = xe^{1-x}$  и функцию искажения, получаемого в виде следующей суперпозиции функций искажения:

$$h(x) = 1_{\{x>1-p\}}(g(x)).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} h(x) &= 1_{\{g(x)>1-p\}}(x) = 1_{\{x>W(-\frac{1-p}{e})\}}(x) = \\ &= 1_{\{x>1-(1+W(-\frac{1-p}{e}))\}}(x), \end{aligned}$$

где через  $W(x)$  обозначена известная функция Ламберта (о функции Ламберта и ее свойствах см. [19], пример ее применения см. [16]).

Тогда с помощью *Предложения 1* из последнего выражения следует формула для функции искажения дисперсии, соответствующей данной функции искажения  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} \rho_h^D[X] &= (VaR_{1+W(-\frac{1-p}{e})}[X] - E[X])^2 = \\ &= (VaR_{1+W(-\frac{1-p}{e})}^{rel}[X])^2, \end{aligned}$$

где через  $VaR_{1+W(-\frac{1-p}{e})}^{rel}[X]$  обозначена соответствующая

мера относительной величины  $VaR$  (см. [16]).

При  $p = 0,95$  получаем  $\rho_h^D[X] = (VaR_{0,9813}^{rel}[X])^2$ .

Меры риска искажения дисперсии, получаемые с помощью суперпозиции функций искажения:

$$\begin{aligned} 1_{\{x>1-p\}}(x), g(x) &= \min\left\{\frac{x}{1-p}, 1\right\}, \\ g_\alpha(x) &= \min\left\{\frac{x}{1-\alpha p}, 1\right\}, p \in [0, 1] \text{ и } g_n(x) = x^n. \end{aligned}$$

Изучим для начала меры риска искажения дисперсии, которые можно получить с помощью функции искажения  $h(x)$ , получаемой с помощью следующих суперпозиций:

$$h(x) = 1_{\{x>1-p\}}(\underbrace{g(g(\dots(g(x))))}_{n-1-\text{раз}}) = 1_{\{x>1-p\}}(g_n(x)).$$

Данная вогнутая функция искажения представляется в виде:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > (1-p)^n \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq (1-p)^n \end{cases} = 1_{\{x > (1-p)^n\}}(x).$$

Как было показано в [16], этой функции искажения, в классе мер риска искажения ожидания, соответствует мера риска «ES в степени  $n$ »,  $\rho_h[X] = ES_p^{(n)}[X]$ , где  $n$  — любое натуральное число.

Рассмотрим меру риска искажения дисперсии, которая соответствует функции искажения данного вида.

Согласно формуле (2) имеем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{\bar{F}_X(x) > (1-p)^n\}} (x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{\bar{F}_X(x) > (1-p)^n\}} - 1] (x - E[X]) dx = \\ &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{F_X(x) \leq 1 - (1-p)^n\}} (x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{F_X(x) \leq 1 - (1-p)^n\}} - 1] (x - E[X]) dx. \end{aligned}$$

Обозначая через  $F_X^{-1}$  функцию, обратную к функции распределения  $F_X$ , получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)\}} (x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)\}} - 1] (x - E[X]) dx. \quad (12) \end{aligned}$$

При дальнейшем выводе формулы для  $\rho_g^D[X]$  нам придется рассмотреть два случая.

А) Предположим, что  $F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) < E[X]$ , т.е.  $VaR_p^{(n)}[X] < E[X]$ .

В этом случае очевидно, что первый интеграл в формуле (12) равен нулю. И мы получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)\}} - 1] (x - E[X]) dx = \\ &= -(x - E[X])^2 \Big|_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) = VaR_p^{(n)}[X]}^{E[X]} = \\ &= (VaR_p^{(n)}[X] - E[X])^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй случай.

В) Предположим, что  $F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) \geq E[X]$ , т.е.  $VaR_p^{(n)}[X] \geq E[X]$ .

В этом случае очевидно, что второй интеграл в формуле (12) равен нулю. И мы получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)\}} (x - E[X]) dx = \\ &= 2 \int_{E[X]}^{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)} (x - E[X]) dx = \\ &= (x - E[X])^2 \Big|_{E[X]}^{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) = VaR_p^{(n)}[X]} = \\ &= (VaR_p^{(n)}[X] - E[X])^2. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

#### Предложение 4

Мерой риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}}(\underbrace{g(g(\dots(g(x))))}_{n-1\text{-раз}}) = 1_{\{x > 1-p\}}(g_n(x)),$$

$p \in (0, 1)$ , является мера риска

$$\rho_g^D[X] = (VaR_p^{(n)}[X] - E[X])^2.$$

Заметим, что величина  $\tilde{\rho}_g^D[X] = \sqrt{\rho_g^D[X]}$  также может служить мерой риска, причем ее размерность, в отличие от  $\rho_g^D[X]$ , совпадает с размерностью случайной величины  $X$ .

Причем, очевидно,

$$\tilde{\rho}_g^D[X] = |VaR_p^{(n)}[X] - E[X]| = |VaR_p^{(n)rel}[X]|,$$

где через  $VaR_p^{(n)rel}[X]$  здесь обозначено относительное значение  $VaR$  в степени  $n$ , т.е. величину отклонения меры риска  $VaR_p^{(n)}[X]$  случайной величины  $X$  от ожидаемого значения  $X$ .

Теперь изучим меры риска искажения дисперсии, которые можно получить с помощью функции искажения  $h(x)$ , получаемой с помощью следующих суперпозиций:

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}}(\underbrace{g(g(\dots(g_\alpha(x))))}_{k-1\text{-раз}}) = 1_{\{x > 1-p\}}(g_{k-1}(g_\alpha(x)))$$

Данная вогнутая функция искажения представляется в виде:

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x > (1-p)^k(1-\alpha p) \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq (1-p)^k(1-\alpha p) \end{cases} = \\ &= 1_{\{x > (1-p)^k(1-\alpha p)\}}(x). \end{aligned}$$

Как было показано в [16], этой функции искажения, в классе мер риска искажения ожидания, соответствует мера риска «VaR в степени  $t$ »,  $\rho_h[X] = VaR_p^{(t)}[X]$  (см. также [15]), где  $t$  — любое действительное число, представленное в следующем виде:  $t = k + \alpha$ , где  $k$  — натуральное число, а  $\alpha$  — действительное число, причем  $0 \leq \alpha < 1$ .

Рассмотрим меру риска искажения дисперсии, которая соответствует функции искажения данного вида.

Согласно формуле (2) имеем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{\bar{F}_X(x) > (1-p)^k (1-\alpha p)\}} (x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{\bar{F}_X(x) > (1-p)^k (1-\alpha p)\}} - 1] (x - E[X]) dx = \\ &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{F_X(x) \leq 1 - (1-p)^k (1-\alpha p)\}} (x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{F_X(x) \leq 1 - (1-p)^k (1-\alpha p)\}} - 1] (x - E[X]) dx. \end{aligned}$$

Обозначая через  $F_X^{-1}$  функцию, обратную к функции распределения  $F_X$ , получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p))\}} (x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p))\}} - 1] (x - E[X]) dx. \quad (13) \end{aligned}$$

При дальнейшем выводе формулы для  $\rho_g^D[X]$  нам придется рассмотреть два случая.

А) Предположим, что

$$F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p)) < E[X],$$

т.е.  $VaR_p^{(t)}[X] < E[X]$ .

В этом случае очевидно, что первый интеграл в формуле (13) равен нулю. И мы получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{-\infty}^{E[X]} [1_{\{x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p))\}} - 1] (x - E[X]) dx = \\ &= -2 \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p))}^{E[X]} (x - E[X]) dx = \\ &= -(x - E[X])^2 \Big|_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p)) = VaR_p^{(t)}[X]}^{E[X]} = \\ &= (VaR_p^{(t)}[X] - E[X])^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй случай.

В) Предположим, что

$$F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p)) \geq E[X],$$

т.е.  $VaR_p^{(t)}[X] \geq E[X]$ .

В этом случае очевидно, что второй интеграл в формуле (13) равен нулю. И мы получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} 1_{\{x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p))\}} (x - E[X]) dx = \\ &= 2 \int_{E[X]}^{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p))} (x - E[X]) dx = \\ &= (x - E[X])^2 \Big|_{E[X]}^{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k (1-\alpha p)) = VaR_p^{(t)}[X]} = \\ &= (VaR_p^{(t)}[X] - E[X])^2. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

#### Предложение 5

Мерой риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}} \underbrace{(g(g(\dots(g(g_\alpha(x))))}_{k-1 \text{ раз}}) = 1_{\{x > 1-p\}} (g_{k-1}(g_\alpha(x))),$$

$p \in (0, 1)$ , является мера риска

$$\rho_g^D[X] = (VaR_p^{(t)}[X] - E[X])^2,$$

для любого действительного числа  $t$ , представленного в следующем виде:  $t = k + \alpha$ , где  $k$  — натуральное число, а  $\alpha$  — действительное число, причем  $0 \leq \alpha < 1$ .

Заметим, что величина  $\tilde{\rho}_g^D[X] = \sqrt{\rho_g^D[X]}$  также может служить мерой риска, причем ее размерность, в отличие от  $\rho_g^D[X]$ , совпадает с размерностью случайной величины  $X$ .

Причем очевидно, что

$$\tilde{\rho}_g^D[X] = |VaR_p^{(t)}[X] - E[X]| = |VaR_p^{(t)rel}[X]|,$$

где через  $VaR_p^{(t)rel}[X]$  здесь обозначено относительное значение  $VaR$  в степени  $t$ , т.е. величину отклонения меры риска  $VaR_p^{(t)}[X]$  случайной величины  $X$  от ожидаемого значения  $X$ .

Теперь изучим меры риска искажения дисперсии, которые можно получить с помощью функции

искажения  $h(x)$ , получаемой с помощью следующих суперпозиций:

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}} \underbrace{(g(g(\dots g(x)\dots))}_{n\text{-раз}}$$

Данная вогнутая функция искажения представляется в виде:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > (1-p)^n \\ \frac{x}{(1-p)^n}, & \text{если } 0 \leq x \leq (1-p)^n \end{cases}$$

Как было показано в [16], этой функции искажения, в классе мер риска искажения ожидания, соответствует мера риска «VaR в степени  $n$ »,  $\rho_h[X] = VaR_p^{(n)}[X]$  (см. также [16]), где  $n$  — любое натуральное число.

Рассмотрим меру риска искажения дисперсии, которая соответствует функции искажения данного вида.

Заметим, что

$$h(\bar{F}(x)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{F}_X(x) > (1-p)^n \\ \frac{\bar{F}_X(x)}{(1-p)^n}, & \text{если } 0 \leq \bar{F}_X(x) \leq (1-p)^n, \end{cases}$$

или

$$h(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} 1, & \text{если } F_X(x) \leq 1 - (1-p)^n \\ \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^n}, & \text{если } F_X(x) > 1 - (1-p)^n, \end{cases}$$

а значит,

$$h(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) \\ \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^n}, & \text{если } x > F_X^{-1}(1 - (1-p)^n). \end{cases}$$

При дальнейшем выводе формулы для  $\rho_g^D[X]$  нам придется рассмотреть два случая.

А) Предположим, что  $F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) < E[X]$ , т.е.  $VaR_p^{(n)}[X] < E[X]$ .

Тогда, согласно (2), получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^n} (x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{E[X]} \left[ \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^n} - 1 \right] (x - E[X]) dx = \\ &= 2 \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{+\infty} \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^n} (x - E[X]) dx - \\ &- 2 \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{E[X]} (x - E[X]) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(1-p)^n} \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{+\infty} (1 - F_X(x)) d(x - E[X])^2 - \\ &- (x - E[X])^2 \Big|_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{E[X]}. \end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям в этом выражении, получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \frac{1}{(1-p)^n} (x - E[X])^2 (1 - F_X(x)) \Big|_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{+\infty} + \\ &+ \frac{1}{(1-p)^n} \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x) + \\ &+ (F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) - E[X])^2. \end{aligned}$$

Тогда, используя предположение А) о функции распределения, получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \\ &= -\frac{1}{(1-p)^n} (F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) - E[X])^2 (1 - F_X(F_X^{-1}(1 - (1-p)^n))) + \\ &+ (F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) - E[X])^2 + \\ &+ \frac{1}{(1-p)^n} \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x). \end{aligned}$$

И тогда, используя, что

$$F_X(F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)) = 1 - (1-p)^n, \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \frac{1}{(1-p)^n} \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x) = \\ &= \frac{1}{(1-p)^n} \int_{VaR_p^{(n)}[X]}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй случай.

В) Предположим, что  $F_X^{-1}(1 - (1-p)^n) \geq E[X]$ , т.е.  $VaR_p^{(n)}[X] \geq E[X]$ .

В этом случае очевидно, что второй интеграл в формуле (2) равен нулю. И мы получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} h(\bar{F}_X(x)) (x - E[X]) dx = \\ &= 2 \int_{E[X]}^{F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)} (x - E[X]) dx + \end{aligned}$$

$$+2 \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^n)}^{+\infty} \frac{1-F_X(x)}{(1-p)^n} (x-E[X])dx =$$

$$(x-E[X])^2 \Big|_{E[X]}^{F_X^{-1}(1-(1-p)^n)=VaR_p^{(n)}[X]} +$$

$$+\frac{1}{(1-p)^n} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^n)}^{+\infty} (1-F_X(x))d(x-E[X])^2.$$

Интегрируя по частям интеграл в данном выражении получаем:

$$\rho_g^D[X] = (F_X^{-1}(1-(1-p)^n) - E[X])^2 +$$

$$+\frac{1}{(1-p)^n} (x-E[X])^2 (1-F_X(x)) \Big|_{F_X^{-1}(1-(1-p)^n)}^{+\infty} +$$

$$+\frac{1}{(1-p)^n} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^n)}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x).$$

Тогда, используя предположение А) о функции распределения, получаем:

$$\rho_g^D[X] = (F_X^{-1}(1-(1-p)^n) - E[X])^2 -$$

$$-\frac{1}{(1-p)^n} (F_X^{-1}(1-(1-p)^n) - E[X])^2 (1-F_X(F_X^{-1}(1-(1-p)^n))) +$$

$$+\frac{1}{(1-p)^n} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^n)}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x).$$

И тогда, используя, что

$$F_X(F_X^{-1}(1-(1-p)^n)) = 1-(1-p)^n, \text{ получаем}$$

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{(1-p)^n} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^n)}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x) =$$

$$= \frac{1}{(1-p)^n} \int_{VaR_p^{(n)}[X]}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x). \quad (14)$$

Вспомнив формулу для дисперсии:

$$D[X] = E[(X-E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x)$$

и сравнив ее с формулой (14), а также учитывая, что  $P\{X > VaR_p^{(n)}[X]\} = (1-p)^n$ , получаем и такое представление для этой меры риска:

$$\rho_g^D[X] = E[(X-E[X])^2 | X > VaR_p^{(n)}[X]], \quad (15)$$

Или, если определить условную дисперсию, при условии  $X > VaR_p^{(n)}[X]$  выражением:

$D[X | X > VaR_p^{(n)}[X]] = E[(X-E[X])^2 | X > VaR_p^{(n)}[X]]$ , получаем следующее представление для этой меры риска искажений дисперсии:

$$\rho_g^D[X] = D[X | X > VaR_p^{(n)}[X]]. \quad (16)$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

#### Предложение 6

мерой риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения  $h(x) = \underbrace{g(\dots(g(x)))}_{n\text{-раз}}$ ,  $p \in (0, 1)$ , является мера риска

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{(1-p)^n} \int_{VaR_p^{(n)}[X]}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x);$$

эту меру риска также можно представить в виде

$$\rho_g^D[X] = D[X | X > VaR_p^{(n)}[X]],$$

где

$$D[X | X > VaR_p^{(n)}[X]] = E[(X-E[X])^2 | X > VaR_p^{(n)}[X]].$$

То есть эта мера риска потерь представляет условную дисперсию случайного фактора  $X$ , представляющего риск, при условии, что величина данных потерь превысила величину  $VaR_p^{(n)}[X]$ .

В работе [16] была введена мера риска «ES в степени  $n$ », которая оказалась (см. [16]) мерой риска искажения ожидания, которую мы будем обозначать  $ES_p^{(n)}[X]$ . Она представляет величину ожидаемых хвостовых потерь, превышающих  $VaR_p^{(n)}[X]$ , т.е. по определению

$$ES_p^{(n)}[X] = E[X | X > VaR_p^{(n)}[X]]. \quad (17)$$

Отсюда, в предположение непрерывности распределения потерь, было получено следующее полезное представление для  $ES_p^{(n)}[X]$ :

$$ES_p^{(n)}[X] = \frac{1}{(1-p)^n} \int_{[1-(1-p)^n, 1]} VaR_q[X] dq. \quad (18)$$

Сравнивая формулу (17) и представление нашей новой меры риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$  в пункте б) Предложения 6, мы видим, что в классе мер риска искажения дисперсии новая мера риска  $\rho_g^D[X]$  имеет ту же значимость, что и мера  $ES_p^{(n)}[X]$  в классе мер риска искажения ожидания.

Отсюда можно сделать вывод, что значимость данной меры для теории и практики риск-менеджмента не меньше значимости мер риска  $ES_p^{(n)}[X]$ .

И еще, глядя на формулу (18), хотелось бы иметь формулу для нашей меры риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$  в форме, аналогичной формуле (17) для меры риска  $ES$ .

Можно доказать справедливость следующего утверждения.

**Предложение 7**

Меру риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$ , соответствующую функции искажения

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}} \underbrace{(g(g(\dots g(x)\dots))}_{n-\text{раз}},$$

где  $g(x) = \min\{\frac{x}{1-p}, 1\}$ ,  $p \in [0, 1]$ , можно представить в виде:

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{(1-p)^n} \int_{[1-(1-p)^n, 1]} VaR_q^{(n)rel}[X] dq, \quad (19)$$

где

$VaR_q^{(n)rel}[X] = VaR_q^{(n)}[X] - E[X]$ , значение соответствующей относительной меры риска  $VaR_q^{(n)}[X]$ .

*Доказательство*

Согласно формуле (6) имеем:

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{(1-p)^n} \int_{VaR_p^{(n)}[X]}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x).$$

Совершим в данном интеграле замену переменной:  $x = F_X^{-1}(1 - (1-q)^n) = VaR_q^{(n)}[X]$  с учетом того, что при  $q = 1$  переменная  $x$  принимает значение  $+\infty$ , а при  $q = p$  переменная  $x$  принимает значение

$VaR_p^{(n)}[X]$ . Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \frac{1}{(1-p)^n} \int_{1-(1-p)^n}^1 (VaR_q^{(n)}[X] - E[X])^2 dq = \\ &= \frac{1}{(1-p)^n} \int_{[1-(1-p)^n, 1]} VaR_q^{(n)rel}[X] dq. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Заметим, что величина  $\tilde{\rho}_g^D[X] = \sqrt{\rho_g^D[X]}$  также может служить мерой риска, причем ее размерность, в отличие от  $\rho_g^D[X]$ , совпадает с размерностью случайной величины  $X$ .

Из Предложения 6 следует, что данная мера риска искажения дисперсии представляет собой новую меру катастрофических рисков.

Представляет интерес сравнение оценок риска, полученных с помощью данной меры и меры риска искажения дисперсии, полученной в предыдущем рассмотрении с помощью функций искажения вида  $h(x) = 1_{\{x > 1-p\}} \underbrace{(g(g(\dots g(x)\dots))}_{n-1-\text{раз}} = 1_{\{x > 1-p\}}(g_n(x))$ .

Можно доказать следующее утверждение.

**Утверждение 2**

Справедливо следующее неравенство:

$$\rho_g^D[X] \geq (VaR_p^{(n)}[X] - E[X])^2,$$

а значит, и

$$\tilde{\rho}_g^D[X] \geq |VaR_p^{(n)}[X] - E[X]| = |VaR_p^{(n)rel}[X]|,$$

где через  $VaR_p^{(n)rel}[X]$  здесь обозначено относительное значение  $VaR_p^{(n)}[X]$ , т.е. величина отклонения меры риска  $VaR_p^{(n)}[X]$  случайной величины  $X$  от ее ожидаемого значения.

*Доказательство*

Из формулы (13), очевидно, следует неравенство

$$\rho_g^D[X] \geq \frac{(VaR_p^{(n)}[X] - E[X])^2}{(1-p)^n} \int_{VaR_p^{(n)}[X]}^{+\infty} dF_X(x).$$

Однако

$$\int_{VaR_p^{(n)}[X]}^{+\infty} dF_X(x) = F_X(+\infty) - F_X(F_X^{-1}(1 - (1-p)^n)) = (1-p)^n.$$

Откуда следует справедливость требуемого неравенства:

$$\rho_g^D[X] \geq (VaR_p^{(n)}[X] - E[X])^2,$$

а значит, и

$$\tilde{\rho}_g^D[X] \geq |VaR_p^{(n)}[X] - E[X]| = |VaR_p^{(n)rel}[X]|.$$

Утверждение доказано.

Смысл данного утверждения в том, что эта мера риска искажения дисперсии всегда дает оценки риска, превышающие (или равные) оценки риска, полученные с помощью первой предложенной нами меры риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}} \underbrace{(g(g(\dots g(x)\dots))}_{n-1-\text{раз}} = 1_{\{x > 1-p\}}(g_n(x))$$

$$p \in (0, 1).$$

Теперь изучим меры риска искажения дисперсии, которые можно получить с помощью функции искажения  $h(x)$ , получаемой в виде любой суперпозиции

функций  $g(x) = \min\{\frac{x}{1-p}, 1\}$  и функций

$g_\alpha(x) = \min\{\frac{x}{1-\alpha p}, 1\}$  следующего вида:

$$h(x) = \underbrace{g(g(\dots(g(g_\alpha(x))\dots))}_{k\text{-раз}}). \text{ При любом действии-}$$

тельном  $t \geq 1$ , представленном в виде  $t = k + \alpha$ , где  $k$  — натуральное число, а  $\alpha$  — действительное число,  $0 < \alpha < 1$ , в классе мер риска искажения ожидания, данной функции искажения соответствует мера риска искажения ожидания «ES в степени  $t$ », т.е.  $ES_p^{(t)}[X] = \rho_h[X]$  (см. [9]).

Исследуем вопрос: какие функции искажения дисперсии соответствуют приведенным функциям искажения  $h$ ?

Заметим, что

$$h(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} 1, \text{ если } \bar{F}_X(x) > (1-p)^k(1-\alpha p) \\ \frac{\bar{F}_X(x)}{(1-p)^k(1-\alpha p)}, \\ \text{если } 0 \leq \bar{F}_X(x) \leq (1-p)^k(1-\alpha p), \end{cases}$$

или

$$h(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} 1, \text{ если } F_X(x) \leq 1 - (1-p)^k(1-\alpha p) \\ \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^k(1-\alpha p)}, \\ \text{если } F_X(x) > 1 - (1-p)^k(1-\alpha p), \end{cases}$$

а значит,

$$h(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \leq F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p)) \\ \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^k(1-\alpha p)}, \\ \text{если } x > F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p)), \end{cases}$$

При дальнейшем выводе формулы для  $\rho_g^D[X]$

нам придется рассмотреть два случая.

А) Предположим, что

$$F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p)) < E[X],$$

т.е.  $Var_p^{(t)}[X] < E[X]$ .

Тогда, согласно (2), получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^k(1-\alpha p)} (x - E[X]) dx + \\ &+ 2 \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))}^{E[X]} \left[ \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^k(1-\alpha p)} - 1 \right] (x - E[X]) dx = \\ &= 2 \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} \frac{1 - F_X(x)}{(1-p)^k(1-\alpha p)} (x - E[X]) dx - \\ &- 2 \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))}^{E[X]} (x - E[X]) dx = \\ &= \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} (1 - F_X(x)) d(x - E[X])^2 - \\ &- (x - E[X])^2 \Big|_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))}^{E[X]}. \end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям в этом выражении, получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \\ &= \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} (x - E[X])^2 (1 - F_X(x)) \Big|_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} + \\ &+ \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x) + \\ &+ (F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p)) - E[X])^2. \end{aligned}$$

Тогда, используя предположение А) о функции распределения, получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \\ &= - \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} (F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p)) - \\ &- E[X])^2 (1 - F_X(F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p)))) + \\ &+ (F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p)) - E[X])^2 + \\ &+ \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x). \end{aligned}$$

И тогда, используя, что

$$F_X(F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))) = 1 - (1-p)^k(1-\alpha p),$$

получаем

$$\begin{aligned}\rho_g^D[X] &= \\ \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x) &= \\ = \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{VaR_p^{(t)}[X]}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x).\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй случай.

В) Предположим, что

$$F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p)) \geq E[X],$$

$$\text{т.е. } VaR_p^{(t)}[X] \geq E[X].$$

В этом случае очевидно, что второй интеграл в формуле (2) равен нулю. И мы получаем:

$$\begin{aligned}\rho_g^D[X] &= 2 \int_{E[X]}^{+\infty} h(\bar{F}_X(x))(x-E[X])dx = \\ &= 2 \int_{E[X]}^{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))} (x-E[X])dx + \\ &+ 2 \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} \frac{1-F_X(x)}{(1-p)^k(1-\alpha p)} (x-E[X])dx = \\ &= (x-E[X])^2 \Big|_{E[X]}^{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))=VaR_p^{(t)}[X]} + \\ &+ \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} (1-F_X(x))d(x-E[X])^2.\end{aligned}$$

Интегрируя по частям интеграл в данном выражении, получаем:

$$\begin{aligned}\rho_g^D[X] &= (F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p)) - E[X])^2 + \\ &+ \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} (x-E[X])^2 (1-F_X(x)) \Big|_{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} + \\ &+ \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x).\end{aligned}$$

Тогда, используя предположение А) о функции распределения, получаем:

$$\begin{aligned}\rho_g^D[X] &= (F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p)) - E[X])^2 - \\ &- \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} (F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p)) - \\ &- E[X])^2 (1-F_X(F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p)))) +\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x).$$

И тогда, используя, что

$$F_X(F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))) = 1-(1-p)^k(1-\alpha p),$$

получаем

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{F_X^{-1}(1-(1-p)^k(1-\alpha p))}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x).$$

Т.е.

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{VaR_p^{(t)}[X]}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x). \quad (20)$$

Вспомнив формулу для дисперсии:

$$D[X] = E[(X-E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x)$$

и сравнив ее с формулой (20), а также учитывая, что  $P\{X > VaR_p^{(t)}[X]\} = (1-p)^k(1-\alpha p)$ , получаем и такое представление для этой меры риска:

$$\rho_g^D[X] = E[(X-E[X])^2 | X > VaR_p^{(t)}[X]], \quad (21)$$

Или, если определить условную дисперсию, при условии  $X > VaR_p^{(t)}[X]$  выражением:

$$D[X | X > VaR_p^{(t)}[X]] = E[(X-E[X])^2 | X > VaR_p^{(t)}[X]],$$

получаем следующее представление для этой меры риска искажений дисперсии:

$$\rho_g^D[X] = D[X | X > VaR_p^{(t)}[X]]. \quad (22)$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

### Предложение 8

мерой риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения

$h(x) = \underbrace{g(g(\dots(g(g_\alpha(x))\dots))}_{k-\text{раз}}$ , является мера риска

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{VaR_p^{(t)}[X]}^{+\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x);$$

эту меру риска также можно представить в виде

$$\rho_g^D[X] = D[X | X > VaR_p^{(t)}[X]],$$

где

$$D[X | X > VaR_p^{(t)}[X]] = E[(X - E[X])^2 | X > VaR_p^{(t)}[X]].$$

То есть эта мера риска потерь представляет условную дисперсию случайного фактора  $X$ , представляющего риск, при условии, что величина данных потерь превысила величину  $VaR_p^{(t)}[X]$ .

В работе [16] была введена мера риска «ES в степени  $t$ », которая оказалась (см. [16]) мерой риска искажения ожидания, которую мы будем обозначать  $ES_p^{(t)}[X]$ . Она представляет величину ожидаемых хвостовых потерь, превышающих  $VaR_p^{(t)}[X]$ , т.е. по определению

$$ES_p^{(t)}[X] = E[X | X > VaR_p^{(t)}[X]]. \quad (23)$$

Отсюда в предположение непрерывности распределения потерь было получено следующее полезное представление для  $ES_p^{(n)}[X]$ :

$$ES_p^{(t)}[X] = \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{[1-(1-p)^k(1-\alpha p), 1]} VaR_q[X] dq. \quad (24)$$

Сравнивая формулу (23) и представление нашей новой меры риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$  в пункте б) Предложения 8, мы видим, что в классе мер риска искажения дисперсии новая мера риска  $\rho_g^D[X]$  имеет ту же значимость, что и мера  $ES_p^{(t)}[X]$  в классе мер риска искажения ожидания.

Отсюда можно сделать вывод, что значимость данной меры для теории и практики риск-менеджмента не меньше значимости мер риска  $ES_p^{(t)}[X]$ .

И еще, глядя на формулу (24), хотелось бы иметь формулу для нашей меры риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$  в форме, аналогичной формуле (23) для меры риска  $ES$ .

Можно доказать справедливость следующего утверждения.

#### Предложение 9

Меру риска искажения дисперсии  $\rho_g^D[X]$ , соответствующую функции искажения

$$h(x) = \underbrace{g(g(\dots(g(g_\alpha(x))\dots))}_{k-\text{раз}}, \text{ можно представить}$$

в виде:

$$\rho_g[X] = \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{[1-(1-p)^k(1-\alpha p), 1]} VaR_q^{(t)rel}[X] dq, \quad (25)$$

где

$VaR_q^{(t)rel}[X] = VaR_q^{(t)}[X] - E[X]$ , значение соответствующей относительной меры риска  $VaR_q^{(t)}[X]$ .

*Доказательство*

Согласно формуле (20) имеем:

$$\rho_g^D[X] = \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{VaR_p^{(t)}[X]}^{+\infty} (x - E[X])^2 dF_X(x).$$

Совершим в данном интеграле замену переменной:  $x = F_X^{-1}(1 - (1-q)^k(1-\alpha q)) = VaR_q^{(t)}[X]$  с учетом того, что при  $q = 1$  переменная  $x$  принимает значение  $+\infty$ , а при  $q = p$  переменная  $x$  принимает значение  $VaR_p^{(t)}[X]$ . Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \rho_g^D[X] &= \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{1-(1-p)^k(1-\alpha p)}^1 (VaR_q^{(t)}[X] - E[X])^2 dq = \\ &= \frac{1}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{[1-(1-p)^k(1-\alpha p), 1]} VaR_q^{(t)rel}[X] dq. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Заметим, что величина  $\tilde{\rho}_g^D[X] = \sqrt{\rho_g^D[X]}$  также может служить мерой риска, причем ее размерность, в отличие от  $\rho_g^D[X]$ , совпадает с размерностью случайной величины  $X$ .

Из Предложения 8 следует, что данная мера риска искажения дисперсии представляет собой новую меру катастрофических рисков.

Представляет интерес сравнение оценок риска, полученных с помощью данной меры и меры риска искажения дисперсии, полученной в предыдущем рассмотрении с помощью функций искажения вида  $h(x) = 1_{\{x>1-p\}}(\underbrace{g(g(\dots(g(g_\alpha(x))\dots))}_{k-1-\text{раз}} = 1_{\{x>1-p\}}(g_{k-1}(g_\alpha(x)))$ .

Можно доказать следующее утверждение.

#### Утверждение 3

Справедливо следующее неравенство:

$$\rho_g^D[X] \geq (VaR_p^{(t)}[X] - E[X])^2,$$

а значит, и

$$\tilde{\rho}_g^D[X] \geq |VaR_p^{(t)}[X] - E[X]| = |VaR_p^{(t)rel}[X]|,$$

где через  $VaR_p^{(t)rel}[X]$  здесь обозначено относительное значение  $VaR_p^{(t)}[X]$ , т.е. величина отклонения меры риска  $VaR_p^{(t)}[X]$  случайной величины  $X$  от ее ожидаемого значения.

*Доказательство*

Из формулы (20), очевидно, следует неравенство:

$$\rho_g^D[X] \geq \frac{(VaR_p^{(t)}[X] - E[X])^2}{(1-p)^k(1-\alpha p)} \int_{VaR_p^{(t)}[X]}^{+\infty} dF_X(x).$$

Однако

$$\int_{VaR_p^{(t)}[X]}^{+\infty} dF_X(x) = F_X(+\infty) - F_X(F_X^{-1}(1 - (1-p)^k(1-\alpha p))) = (1-p)^k(1-\alpha p).$$

Откуда следует справедливость требуемого неравенства:

$$\rho_g^D[X] \geq (VaR_p^{(t)}[X] - E[X])^2,$$

а значит, и

$$\tilde{\rho}_g^D[X] \geq |VaR_p^{(t)}[X] - E[X]| = |VaR_p^{(rel)}[X]|.$$

Утверждение доказано.

Смысл данного утверждения в том, что эта мера риска искажения дисперсии всегда дает оценки риска, превышающие (или равные) оценки риска, полученные с помощью первой предложенной нами меры риска искажения дисперсии, соответствующей функции искажения

$$h(x) = 1_{\{x > 1-p\}}(g(\underbrace{g(\dots g}_{k-1-\text{раз}}(g_\alpha(x))\dots)) = 1_{\{x > 1-p\}}(g_{k-1}(g_\alpha(x))),$$

$p \in (0, 1)$ , т.е. меры риска  $(VaR_p^{(t)}[X] - E[X])^2$ .

## ВЫВОДЫ

В последнее десятилетие происходило бурное теоретическое исследование класса мер риска, получивших название мер риска искажения ожидания, и они стали широко использоваться в финансовых и страховых приложениях благодаря своим привлекательным свойствам.

В данной работе вводится новое понятие мер риска искажения дисперсии и исследуются некоторые их свойства. Рассмотрено большое количество примеров мер риска искажения дисперсии и исследована возможность их применения для оценки рисков различной степени катастрофичности. В работах автора были введены в научный оборот и исследованы меры риска « $VaR$  в степени  $t$ » и мер риска « $ES$  в степени  $t$ ». В них с использованием композитного метода было доказано, что эти меры также принадлежат к классу мер риска искажения ожидания и описываются соответствующие функции искажения. В данной работе произведен поиск мер риска искажения дисперсии с использованием тех же функций искажения, которые использовались для построения мер риска « $VaR$  в степени  $t$ » и « $ES$  в степени  $t$ » как подмножеств мер риска искажения ожидания. При этом были выявлены такие меры риска искажения дисперсии, как квадрат относительной величины меры риска « $VaR$  в степени  $t$ »  $\rho_g^D[X] = (VaR_p^{(t)}[X] - E[X])^2$  и мера риска, которая представляет условную дисперсию случайного фактора  $X$  при условии, что величина данных потерь превысила величину  $VaR_p^{(t)}[X]$ , и получены различные формулы для представления данных мер риска искажения дисперсии. В работе исследован вопрос о соотношении между этими мерами риска искажения дисперсии.

Меры риска искажения ожидания на настоящий момент изучены достаточно хорошо и обладают многими полезными и удобными свойствами. Данная работа открывает интересную область исследования мер риска искажения дисперсии. Интересным представляется как исследование общих свойств мер риска искажения дисперсии, так и нахождение новых мер риска искажения дисперсии с особыми свойствами, позволяющими выявлять финансовые риски различной степени катастрофичности.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Круи М., Галай Д., Марк Р. Основы риск-менеджмента. Пер. с англ. М.: Юрайт; 2006. 414 с.  
Crouhy M., Galai D., Mark R. The essentials of risk management. New York: McGraw-Hill Book Co.; 2006. 414 p.  
(Russ. ed.: Crouhy M., Galai D., Mark R. Osnovy risk-menedzhmenta. Moscow: Urait; 2006. 414 p.).
2. Hull J.C. Risk management and financial institutions. New York: Pearson Education International; 2007. 576 p.
3. Jorion P. Value at risk: The new benchmark for managing financial risk. New York: McGraw-Hill Education; 2007. 624 p.
4. Wang S.S. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *The Journal of Risk and Insurance*. 2000;67(1):15–36. DOI: 10.2307/253675
5. Szego G., ed. Risk measures for the 21<sup>st</sup> century. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd; 2004. 491 p.

6. Denneberg D. Non-additive measure and integral. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 1994. 178 p. (Theory and Decision Library B. Vol. 27). DOI: 10.1007/978-94-017-2434-0
7. Wang S., Dhaene J. Comonotonicity, correlation order and premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*. 1998;22(3):235–242. DOI: 10.1016/S 0167-6687(97)00040-1
8. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 1999;9(3):203–228. DOI: 10.1111/1467-9965.00068
9. Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Ltd; 2005. 440 p. DOI: 10.1002/0470016450
10. Zhu L., Li H. Tail distortion risk and its asymptotic analysis. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2012;51(1):115–121. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2012.03.010
11. Yang F. First- and second-order asymptotics for the tail distortion risk measure of extreme risks. *Communications in Statistics — Theory and Methods*. 2015;44(3):520–532. DOI: 10.1080/03610926.2012.751116
12. Yin C., Zhu D. New class of distortion risk measures and their tail asymptotics with emphasis on VaR. *Journal of Financial Risk Management*. 2018;7(1):12–38. DOI: 10.4236/jfrm.2018.71002
13. Belles-Sampera J., Guillén M., Santolino M. Beyond value-at-risk: GlueVaR distortion risk measures. *Risk Analysis*. 2014;34(1):121–134. DOI: 10.1111/risa.12080
14. Belles-Sampera J., Guillén M., Santolino M. GlueVaR risk measures in capital allocation applications. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2014;58:132–137. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2014.06.014
15. Минасян В.Б. Новые способы измерения катастрофических рисков: меры «VaR в степени  $t$ » и их вычисление. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(3):92–109. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-3-92-109  
Minasyan V.B. New ways to measure catastrophic financial risks: “VaR to the power of  $t$ ” measures and how to calculate them”. *Finansy: teoriya i praktika = Finance: Theory and Practice*. 2020;24(3):92–109. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-3-92-109
16. Минасян В.Б. Меры «VaR в степени  $t$ » и «ES в степени  $t$ » и меры риска искажения. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(6):92–107. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-6-92-107  
Minasyan V.B. New risk measures “VaR to the power of  $t$ ” and “ES to the power of  $t$ ” and distortion risk measures. *Finansy: teoriya i praktika = Finance: Theory and Practice*. 2020;24(6):92–107. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-6-92-107
17. Dhaene J., Kukush A., Linders D., Tang Q. Remarks on quantiles and distortion risk measures. *European Actuarial Journal*. 2012;2(2):319–328. DOI: 10.1007/s13385-012-0058-0
18. Wang S.S. Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*. 1996;26(1):71–92. DOI: 10.2143/AST.26.1.563234
19. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert  $W$  function. *Advances in Computational Mathematics*. 1996;5:329–359. DOI: 10.1007/BF02124750

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / ABOUT THE AUTHOR



**Виген Бабкенович Минасян** — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой корпоративных финансов, инвестиционного проектирования и оценки им. М.А. Лимитовского, Высшая школа финансов и менеджмента, Российская академия народного хозяйства и государственной службы, Москва, Россия

**Vigen B. Minasyan** — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Head of Limitovskii Corporate Finance, Investment Design and Evaluation Department, Higher School of Finance and Management, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

minasyanvb@ranepa.ru, minasyanvb@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 15.04.2021; после рецензирования 30.05.2021; принята к публикации 22.09.2021.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

The article was submitted on 15.04.2021; revised on 30.05.2021 and accepted for publication on 22.09.2021.

The author read and approved the final version of the manuscript.