

DOI: 10.26794/2587-5671-2022-26-2-204-218

УДК 519.246.8, 519.246.2, 336.763, 336.767(045)

JEL C58, C53, C52, C51, G17

Многомерная асимметричная GARCH-модель с динамической корреляционной матрицей

Ю.С. Трифонов, Б.С. Потанин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Авторы исследуют проблему моделирования совместной динамики условной волатильности нескольких финансовых активов в условиях асимметричной зависимости между волатильностью и шоками в доходности (эффект рычага). Предложена новая многомерная асимметричная модель условной гетероскедастичности с динамической корреляционной матрицей (DCC-EGARCH), позволяющая моделировать совместную динамику нескольких финансовых активов с учетом эффекта рычага на финансовых рынках. Преимущество DCC-EGARCH-модели в сравнении с предложенными ранее многомерными асимметричными спецификациями заключается в существенном упрощении оптимизационной задачи, а также ослаблении предпосылки об инвариантности условной корреляции во времени, что облегчает применение предлагаемого метода на практике. С целью изучения свойств оценок модели авторы осуществили анализ симулированных данных. В результате получены статистические свидетельства в пользу преимущества использования разработанной DCC-EGARCH-модели в сравнении с симметричным DCC-GARCH-процессом в случае рассмотрения данных с присутствием эффекта рычага. Далее авторы воспользовались предложенным методом для анализа совместной волатильности доходностей акций ПАО «НК Роснефть» и цен на нефть марки Brent. За счет применения DCC-EGARCH-модели авторы нашли статистические свидетельства как в пользу наличия эффекта рычага на данных нефтяных цен, так и в пользу наличия динамической корреляционной структуры между рассматриваемыми временными рядами, что мотивирует применение предложенного метода на практике.

Ключевые слова: финансовые рынки; финансовые активы; условная волатильность; EGARCH; DCC-GARCH; эффект рычага; условная корреляция; многомерные GARCH-модели; совместная динамика волатильности

Для цитирования: Трифонов Ю.С., Потанин Б.С. Многомерная асимметричная GARCH-модель с динамической корреляционной матрицей. *Финансы: теория и практика*. 2022;26(2):204-218. DOI: 10.26794/2587-5671-2022-26-2-204-218

ORIGINAL PAPER

Multivariate Asymmetric GARCH Model with Dynamic Correlation Matrix

Ju.S. Trifonov, B.S. Potanin

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

ABSTRACT

This study examines the problem of modeling the joint dynamics of conditional volatility of several financial assets under an asymmetric relationship between volatility and shocks in returns (leverage effect). We propose a new multivariate asymmetric conditional heteroskedasticity model with a dynamic conditional correlation matrix (DCC-EGARCH). The proposed method allows modelling the joint dynamics of several financial assets taking into account the leverage effect in the financial markets. DCC-EGARCH model has two main advantages over previously proposed multivariate asymmetric specifications. It involves a substantially simpler optimization problem and does away with the assumption of conditional correlation time invariance. These features make the model more suitable for practical applications. To study the properties of the obtained estimators, we conducted a simulated data analysis. As a result, we found statistical evidence in favor of the developed DCC-EGARCH model compared with the symmetric DCC-GARCH process in case of considering data with the presence of the leverage effect. Further, we applied the proposed method to analyze the joint volatility of Rosneft stock returns and Brent oil prices. By estimating the DCC-EGARCH model, we found statistical evidence for both the presence of the leverage effect in the oil price data and the presence of the dynamic correlation structure between the time series, which motivates the practical application of the proposed method.

Keywords: financial markets; financial assets; volatility modelling; EGARCH; DCC-GARCH; leverage effect; conditional correlation; multivariate GARCH models; joint volatility dynamics

For citation: Trifonov Ju.S., Potanin B.S. Multivariate asymmetric GARCH model with dynamic correlation matrix. *Finance: Theory and Practice*. 2022;26(2):204-218. DOI: 10.26794/2587-5671-2022-26-2-204-218

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных показателей, характеризующих поведение активов на финансовых рынках, является волатильность. Данный показатель выражается как стандартное отклонение доходности рассматриваемых финансовых инструментов и является индикатором уровня риска активов или портфеля ценных бумаг в совокупности [1, 2]. По этой причине различные участники финансового рынка заинтересованы в моделировании волатильности с целью проведения эффективной политики риск-менеджмента [3]. Одним из наиболее известных методов моделирования условной волатильности является класс GARCH-процессов. Однако в современном мире процесс хеджирования тесно связан с моделированием корреляции между активами, входящими в портфель ценных бумаг, в то время как одномерные GARCH-процессы позволяют рассматривать динамику активов лишь по отдельности [4]. Данная причина послужила стимулом к развитию класса многомерных GARCH-моделей, задачей которых является совместное моделирование динамики волатильности нескольких финансовых инструментов.

Так как основной областью применения GARCH-процессов является моделирование динамики финансовых временных рядов, то по мере развития различных модификаций GARCH-моделей исследователи ставили перед собой цель интеграции особенностей поведения финансовых активов в разрабатываемые методы. Одним из наиболее интересных и широко изучаемых стилизованных фактов на финансовых рынках является асимметричная зависимость между доходностями активов и их волатильностью, что в литературе также известно в качестве эффекта рычага [5]. Суть данной особенности заключается в том, что рынок более инерционно реагирует на негативные шоки доходности, чем на положительные [5, 6]. В литературе существует несколько подходов к объяснению причин возникновения эффекта рычага [6]. Так, например, согласно [7, 8] негативные шоки доходности приводят к росту финансового рычага компаний-эмитентов, что увеличивает уровень риска выпущенных акций и, следовательно, приводит к росту их волатильности. Кроме того, эффект рычага может возникать как следствие когнитивных особенностей инвесторов в соответствии с теорией перспектив Канемана и Тверски [9], люди склонны воспринимать потери более критично, из-за чего в случае негативных шоков доходности инвесторы могут прибегать к массовой продаже активов, тем самым провоцируя рост волатильности.

Ввиду того, что стандартная GARCH-модель является симметричной моделью и не позволяет учесть

эффект рычага, то со временем авторами были разработаны асимметричные модификации GARCH-моделей, основной вклад в развитие которых был успешно внесен в исследованиях [6, 10, 11].

Однако пласт, посвященный развитию многомерных асимметричных GARCH-процессов, является малоизученным в современной литературе, что является фокусом данного исследования.

В качестве существующих методов можно выделить асимметричную BEKK-модель¹ [12], GJR²-BEKK [13] спецификацию, а также обобщения асимметричного EGARCH-процесса на многомерный случай, предложенные в работах [14, 15]. Однако данные модели характеризуются наличием феномена «проклятие размерности», так как требуют одновременной оценки большого количества неизвестных параметров. В свою очередь, предложенные многомерные EGARCH-спецификации [14, 15] содержат жесткую нереалистичную предпосылку о постоянстве корреляционной матрицы во времени, что затрудняет их применение на реальных данных.

В данном исследовании предлагается альтернативная асимметричная многомерная модель условной гетероскедастичности с динамической во времени корреляционной матрицей, именуемой далее DCC-EGARCH-моделью. Предложенная спецификация позволяет моделировать совместную динамику условных волатильностей нескольких активов с возможностью учета эффекта рычага. Разработанный метод реализуется за счет адаптации асимметричного EGARCH-процесса [6] на многомерный случай, используя в качестве базиса DCC-GARCH-спецификацию [16]. Преимуществом предлагаемой DCC-EGARCH-модели в сравнении с аналогами является существенно более низкая сложность оптимизационной задачи за счет возможности оценки параметров с помощью двухшаговой процедуры Энгеля [16], Ньюи и МакФаддена [17], что позволяет избежать «проклятия размерности». Кроме того, за счет использования DCC-спецификации предложенный метод ослабляет предпосылку об инвариантности условной корреляционной матрицы относительно времени, которая являлась характерной для более ранних обобщений EGARCH-процессов на многомерный случай, предложенных в исследованиях [14, 15].

С целью исследования свойств предлагаемого метода в данном исследовании используется ана-

¹ Аббревиатура BEKK состоит из первых букв фамилий ее авторов: Baba, Engel, Kraft и Kroner [21].

² По аналогии с BEKK, модель обозначается по именам авторов: Glosten, Jagannathan и Runkle [10].

лиз симулированных данных. В результате были найдены статистические свидетельства в пользу преимущества использования модели DCC-EGARCH относительно симметричного DCC-GARCH-процесса при рассмотрении данных с присутствием эффекта рычага. В частности, исходя из анализа симуляций разработанная спецификация смогла обеспечить более эффективные оценки относительно классической DCC-GARCH-модели. Кроме того, реализуется применение предложенной DCC-EGARCH-спецификации для исследования реальных данных, в качестве которых выступают доходности акций ПАО «НК Роснефть» и временной ряд изменений цен на нефть марки Brent. На основе результатов анализа были найдены статистические свидетельства как в пользу присутствия значимого эффекта асимметрии в случае рассмотрения временного ряда нефтяных цен, так и в пользу наличия динамической корреляционной структуры между активами, что оправдывает использование предложенного метода на реальных данных.

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1. Экспоненциальная обобщенная модель условной гетероскедастичности (EGARCH)

Одним из наиболее известных асимметричных GARCH-процессов является экспоненциальная обобщенная модель условной гетероскедастичности (EGARCH), предложенная Нельсоном [6]. Пусть ε_t является случайным шоком доходности рассматриваемого актива. Предположим, что σ_t^2 является условной дисперсией ε_t , а значит, не может принимать отрицательные значения. Подобное ограничение в GARCH-модели соблюдалось за счет спецификации безусловной дисперсии в виде линейной комбинации положительных случайных величин с применением положительных коэффициентов. При разработке EGARCH-модели Нельсон [6] предложил иное элементарное преобразование для соблюдения данного условия: представление логарифма условной дисперсии в виде линейной функции от времени и предыдущих значений независимых, одинаково распределенных случайных шоков z_t . Применение данной спецификации обеспечивает неотрицательные значения условной дисперсии без необходимости наложения каких-либо ограничений на параметры процесса. Далее для возможности учета в модели асимметричной зависимости между доходностью и волатильностью финансового актива возникла необходимость задать зависимость логарифма условной дисперсии таким образом, чтобы ее значение зависело как от величины шока z_t , так и от его знака [6]. В качестве подходящей спецификации Нельсон

[6] предложил специфицировать логарифм условной дисперсии как линейную комбинацию от z_t и $|z_t|$. Тогда итоговую спецификацию EGARCH процесса можно записать с помощью следующей системы уравнений:

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2), \quad (1)$$

$$y_t = \mu + \varepsilon_t, \quad (2)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t, \quad (3)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha |z_{t-1}| + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2), \quad (4)$$

где Ψ_t обозначает информацию, доступную в периоде t , где $t \in N$. Случайные шоки z_t являются независимыми и одинаково распределенными стандартными нормальными случайными величинами. Оцениваемыми параметрами выступают μ , ω , α , γ и β . При этом наибольший интерес представляют коэффициенты ω , α , γ и β , отвечающие за динамику условной дисперсии.

Особенностью модели является наличие коэффициента γ , отвечающего за эффект рычага, что и позволяет спецификации процесса условной дисперсии асимметрично реагировать на положительные и негативные шоки доходности финансового актива [6]. Таким образом, если $\gamma > 0$, то прирост $\ln(\sigma_{t+1}^2)$ является положительным в том случае, если значение доходности оказалось выше, чем его ожидаемое значение; и наоборот — если значение доходности оказалось ниже ожидаемой величины, то прирост волатильности будет меньше, чем в первом случае. Аналогично, если $\gamma < 0$, то прирост условной дисперсии будет более значительным в случае отрицательных шоков доходности и более слабым, если значение доходности превысило ожидаемую величину [6].

Аналогично другим моделям семейства GARCH неизвестные параметры в EGARCH-спецификации обычно оцениваются с помощью метода максимального правдоподобия при предположении о нормальном распределении случайных шоков. Тогда максимизируемая функция правдоподобия принимает следующий вид:

$$L(\mu, \omega, \alpha, \beta, \gamma) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right),$$

где дисперсия σ_t^2 описывается уравнением (4) EGARCH-модели, а T — число имеющихся в данных временных периодов.

1.2. Модель с динамической корреляцией (DCC-GARCH)

Значимый вклад в развитие многомерных GARCH-процессов внесло исследование Энгеля [16], в котором была предложена обобщенная модель условной гетероскедастичности с динамической во времени корреляционной матрицей (DCC³-GARCH). Данная спецификация является обобщением модели CCC⁴-GARCH [18], ослабляя предпосылку об инвариантности корреляции во времени, которая, согласно [4, 16, 19], является жесткой и зачастую может не согласовываться с реальными данными.

Обозначим доходности N различных активов как вектор y_t . Тогда DCC-GARCH-процесс имеет следующую спецификацию:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t),$$

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} z_t,$$

$$H_t = D_t R_t D_t,$$

где H_t является $N \times N$ условной ковариационной матрицей ε_t в момент времени t . В качестве D_t выступает $N \times N$ диагональная матрица условных стандартных отклонений ε_t в момент времени t . Матрица R_t является динамической во времени корреляционной $N \times N$ матрицей стандартизированных остатков в момент времени t , а z_t — вектор независимых, одинаково распределенных, стандартных нормальных случайных величин [16].

Также отметим, что элементы диагональной матрицы D_t — условные стандартные отклонения, определяемые одномерными GARCH-процессами:

$$\sigma_{ii}^2 = \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{(t-1)i}^2 + \beta_i \sigma_{(t-1)i}^2,$$

где индекс i обозначает номер рассматриваемого актива, $i \in \{1, \dots, m\}$. Параметры α и β обозначают вклад ARCH и GARCH частей в формирование условной дисперсии соответственно.

Заметим, что матрица R_t является условной корреляционной матрицей стандартизированных остатков ε_t , из чего следует [16]:

$$\varepsilon_t = D_t^{-1} \varepsilon_t \sim N(0, R_t).$$

С целью соблюдения условия о строгой положительной определенности ковариационной матрицы и обеспечения значений корреляций, не превыша-

ющих единицу по модулю, Энгель [16] предложил специфицировать матрицу R_t следующим образом:

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1},$$

$$Q_t = (1 - a - b) \bar{Q} + a \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^T + b Q_{t-1},$$

где $\bar{Q}$ является безусловной ковариационной матрицей стандартизированных остатков ε_t ⁵, a и b являются оцениваемыми параметрами, а Q_t^* — диагональная матрица, состоящая из квадратных корней диагональных элементов матрицы Q_t :

$$Q_t^* = \begin{pmatrix} \sqrt{q_{1,1,t}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{2,2,t}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{q_{n,n,t}} \end{pmatrix}.$$

Также заметим, что для выполнения условия о положительной определенности условной ковариационной матрицы H_t на параметры a и b накладываются следующие ограничения [16]:

$$a \geq 0, \quad b \geq 0,$$

$$a + b < 1.$$

Как правило, оценивание параметров DCC-GARCH-модели производится с помощью метода максимального правдоподобия при допущении о совместном нормальном распределении случайных шоков. Тогда логарифм максимизируемой функции правдоподобия можно записать следующим образом:

$$\ln L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\begin{aligned} & n \times \ln(2\pi) + 2 \ln(|D_t|) + \\ & + \varepsilon_t^T D_t^{-1} D_t^{-1} \varepsilon_t - \varepsilon_t^T \varepsilon_t + \ln(|R_t|) + \\ & + \varepsilon_t^T R_t^{-1} \varepsilon_t \end{aligned} \right).$$

Несложно заметить, что в случае наличия ковариационной матрицы большого размера непосредственная максимизация функции правдоподобия становится затруднительной задачей [16]. В качестве альтернативного метода получения оценок параметров применяется двухшаговая процедура, предложенная Ньюи и МакФадденом [17]. Использование данного метода позволяет существенно упростить

³ Dynamic Conditional Correlation.

⁴ Constant Conditional Correlation.

⁵ Оценка безусловной ковариационной матрицы может быть получена как $\bar{Q} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \varepsilon_t^T$.

оптимизационную задачу, сохраняя состоятельность оценок.

Обозначим вектор оцениваемых параметров матрицы D за θ , а вектор параметров матрицы R за Δ : т.е. $\theta = (\mu, \omega, \alpha, \beta)$, $\Delta = (a, b)$. Тогда логарифм функции правдоподобия можно представить в виде суммы вкладов волатильности и корреляции [16, 20]:

$$\ln L(\theta, \Delta) = \ln L_v(\theta) + \ln L_c(\theta, \Delta).$$

Первый шаг процедуры заключается в максимизации части функции правдоподобия, отражающей вклад волатильности, т.е. $\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \{\ln L_v(\theta)\}$. При этом заметим, что максимизация $\ln L_v(\theta)$ подразумевает раздельное оценивание параметров одномерных GARCH процессов для каждого из активов. На втором шаге процедуры максимизируется вторая часть функции правдоподобия, за счет чего могут быть получены оценки параметров a и b , отвечающие за динамику изменения условной корреляции. При этом вместо вектора истинных параметров θ подставляется его оценка, найденная на первом шаге: $\max \ln L_c(\hat{\theta}, \Delta)$. Отметим, что при соблюдении некоторых условий регулярности [16, 17] получение состоятельных оценок на первом шаге обеспечивает получение состоятельных оценок и на втором шаге метода.

1.3. Асимметричные многомерные GARCH-модели

Ввиду наличия на финансовых рынках стилизованного факта об асимметричной зависимости между волатильностью активов и их доходностью [5], развитие многомерных GARCH-моделей повлекло за собой необходимость интеграции в них учета асимметричной зависимости за счет расширения асимметричных одномерных GARCH-моделей на многомерный случай.

Одним из первых подобных обобщений стала асимметричная BEKK модель, предложенная Кронером и Энжи [12]. Данная спецификация повторяет BEKK-модель [21], за исключением того, что уравнение динамики условной ковариационной матрицы также включает в себя дополнительную квадратичную форму, определяющую эффект асимметрии. Данный элемент зависит от попарного произведения векторов, отражающих отрицательные шоки в доходности:

$$H_t = CC^T + A^T \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^T A + B^T H_{t-1} B + G^T \eta_{t-1} \eta_{t-1}^T G,$$

где $\eta_{it} = \max[0, -\varepsilon_{it}]$, а $\eta_t = [\eta_{1t}, \dots, \eta_{Nt}]^T$, матрицы C , A , B и G являются $N \times N$ матрицами

оцениваемых параметров, удовлетворяющими следующим условиям:

- C — нижняя треугольная матрица;
- A , B и G — диагональные матрицы, где матрица G отражает эффект асимметричной реакции дисперсии на шоки в доходности.

Заметим, что наложенное ограничение о диагональном виде рассматриваемых матриц порождает предпосылку того, что дисперсии зависят только от собственных квадратов остатков, а ковариации — исключительно от прошлых значений кросс-произведений остатков, что может не согласовываться с реальными данными [21–23]. Однако при ослаблении данной предпосылки метод страдает от феномена «проклятия размерности». То есть в случае рассмотрения большого количества временных рядов оптимизационная задача характеризуется высокой сложностью из-за большого числа оцениваемых параметров, что является недостатком данного типа моделей в сравнении с DCC-спецификацией. Помимо представленной асимметричной BEKK-модели [12], впоследствии также была разработана ее модификация GJR-BEKK [13], содержащая бинарную переменную-переключатель, отражающую влияние позитивных и негативных шоков на условную волатильность. Однако использование GJR-BEKK-спецификации аналогично асимметричной BEKK-модели приводит к проблеме «проклятия размерности».

Альтернативные спецификации, адаптирующие одномерные асимметричные GARCH-модели к многомерному случаю, были предложены Коутмусом и Бусом [14], а также Джейном и Дингом [15]. В данных исследованиях были представлены обобщения асимметричного EGARCH-процесса на многомерный случай. При этом как модель [14], так и [15] требуют выполнения жесткой предпосылки об инвариантности условной корреляционной матрицы относительно времени. Данная предпосылка может зачастую не согласовываться с реальными данными [4, 16], что является существенным ограничением предложенных методов. Например, были найдены статистические свидетельства в пользу различия корреляции между американским индексом S&P 500 и японским индексом Nikkei 225 в периоды до мирового финансового кризиса и после, поскольку корреляция между данными финансовыми рядами до кризиса определялась нормальными рыночными условиями, в то время как после кризиса данные условия были нарушены [4].

В данном исследовании предлагается обобщение EGARCH-модели на многомерный случай с использованием DCC-спецификации. Преимущество разработанного метода в сравнении с аналогами

заключается в возможности учета эффекта рычага, ослабляя предпосылку об инвариантности корреляционной структуры относительно времени. При этом применение двухшаговой процедуры для оценки параметров DCC-спецификации позволяет обеспечить значительно более низкую сложность оптимизационной задачи без наложения дополнительных ограничений, в отличие от предложенных ранее асимметричных BEKK-спецификаций.

2. МЕТОДОЛОГИЯ

2.1. Процесс генерации данных в DCC-EGARCH-модели

Пусть логарифмическая доходность каждого из рассматриваемых N активов в момент времени t обозначается как вектор y_t . Тогда уравнение доходности принимает вид:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, H_t).$$

Специфицируя случайные ошибки, исходя из классического GARCH-процесса [24] и применяя спецификацию DCC [16] для перехода к многомерному случаю, получаем:

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} z_t,$$

$$H_t = D_t R_t D_t,$$

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1},$$

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^T + \beta Q_{t-1},$$

где все обозначения являются аналогичными DCC-GARCH-процессу.

Особенностью представленной в данной работе DCC-EGARCH-модели является то, что элементы матрицы D_t генерируются не с помощью одномерных симметричных GARCH-процессов, а за счет применения асимметричной EGARCH-модели [6], т.е.

$$\sigma_t = \sqrt{\exp\left(\omega + \alpha |z_{t-1}| + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)\right)},$$

где параметр γ отражает эффект асимметрии.

Ввиду того, что максимизация полной функции правдоподобия является сложной оптимизационной задачей по причине большого количества оцениваемых параметров, в текущем исследовании применяется двухшаговая процедура оценивания, предложенная в работах [16, 17]. За счет ее реализации увеличение количества оцениваемых параметров вследствие учета асимметричного влияния дисперсии на шоки в доходности не приводит к еще

более высокой вычислительной сложности. Данная особенность предлагаемого метода является преимуществом относительно асимметричных BEKK-моделей [12, 13], характеризующихся высокой оптимизационной сложностью из-за большого числа оцениваемых параметров.

2.2. Двухшаговая процедура оценивания DCC-EGARCH-модели

Согласно [16] первый шаг в процедуре оценивания модели с динамической корреляцией заключается в максимизации логарифма функции правдоподобия, отражающей вклад волатильностей. Отметим, что в данном исследовании реализуется адаптация EGARCH-модели к двумерному⁶ случаю. Тогда первый шаг заключается в оценке двух одномерных EGARCH-процессов при допущении нормального распределения случайных шоков:

$$\ln L_V(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \left(\ln(2\pi) + \ln(\sigma_{i,t}^2) + \frac{\varepsilon_{i,t}^2}{\sigma_{i,t}^2} \right),$$

где $\sigma_{i,t}^2 = \exp\left(\omega + \alpha |z_{t-1}| + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{i-1}^2)\right)$, а θ

является вектором оцениваемых параметров EGARCH-процесса: $\theta = (\mu, \omega, \alpha, \beta, \gamma)$.

Второй шаг процедуры оценки DCC модели [16] подразумевает максимизацию части функции правдоподобия, отражающей вклад корреляции, предполагая совместное нормальное распределение случайных шоков, т.е.:

$$\ln L_C(\theta, \Delta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(-\varepsilon_t^T \varepsilon_t + \ln(|R_t|) + \varepsilon_t^T R_t^{-1} \varepsilon_t \right),$$

где Δ является вектором параметров, отвечающих за изменение корреляционной матрицы во времени: $\Delta = (a, b)$.

Заметим, что в случае адаптации EGARCH-модели к многомерному случаю с использованием DCC-спецификации, изменения относительно симметричной DCC-GARCH-модели касаются только реализации первого шага процедуры. Таким образом, на первом шаге оцениваются параметры каждого из одномерных EGARCH-процессов, включая коэффициент γ , отвечающий за эффект рычага на рынке. За счет нахождения данных оценок на первом шаге могут быть рассчитаны матрицы оцененных стандартных

⁶ Данное исследование концентрируется на анализе двумерной спецификации. При этом спецификации N -мерных моделей и соответствующих функций правдоподобия являются аналогичными двумерному случаю.

отклонений D_t , матрица оцененных значений стандартизированных остатков, а также оценка безусловной ковариационной матрицы $\bar{Q} = E(\epsilon_t \epsilon_t^T)$ [16]. Тогда второй шаг процедуры оценивания асимметричной DCC-EGARCH-модели заключается в максимизации функции правдоподобия с подстановкой оценок, найденных на первом шаге, за счет чего могут быть найдены оценки параметров a и b , определяющие изменение условной корреляционной матрицы во времени.

3. АНАЛИЗ СИМУЛИРОВАННЫХ ДАННЫХ

3.1. Описание симулированных данных

С целью изучения свойств оценок, получаемых с помощью разработанного DCC-EGARCH-метода, в данном исследовании применяется анализ симулированных данных. Сгенерированные данные представляют собой двумерную выборку, состоящую из 300 наблюдений⁷, а истинные параметры симуляций приведены в табл. 1. Отметим, что первые пять параметров являются различными для каждого из двух процессов, так как определяют динамику условной дисперсии для каждого уравнения, следуя спецификации EGARCH-процессов. В то же время параметры a и b являются заданными для всего процесса в целом, так как определяют изменение корреляционной матрицы шоков во времени. Значения истинных параметров были выбраны с соблюдением условий стационарности процесса [6, 16, 24]. Параметры, отвечающие за эффект рычага и динамику изменения корреляционной матрицы, были определены достаточно большими по модулю с целью обеспечения их значимого влияния на сгенерированный процесс, при этом условия стационарности также были соблюдены.

С целью предварительного анализа сгенерированных данных согласно процессу DCC-EGARCH далее приводится графический анализ динамики истинной условной дисперсии и изменяющейся во времени корреляции между случайными шоками. На рис. 1 представлена зависимость волатильности от предыдущего значения случайных шоков для каждого из двух рассматриваемых временных рядов.

Заметим, что на графике в явном виде присутствует эффект асимметрии в соответствии с процессом генерации данных DCC-EGARCH-модели. Волатильность увеличивается более инерционно при негативных

⁷ Подобный объем выборки обуславливается приближением к реальным условиям, возникающим при оценке финансовых временных рядов, имеющих, как правило, в своей структуре большое количество структурных сдвигов, что зачастую не позволяет использовать выборки больших объемов.

Таблица 1 / Table 1

Истинные параметры симуляций / True simulation parameters

Параметр / Parameter	Первый процесс / First process	Второй процесс / Second process
μ	0,5	0,3
α	0,15	0,25
β	0,7	0,5
ω	0,001	0,005
γ	-0,4	-0,3
a	0,5	
b	0,2	

Источник / Source: составлено авторами / compiled by the authors.

шоках доходности, чем при положительных. Соответственно, предполагается, что за счет применения предложенной DCC-EGARCH-модели сможет быть уловлен присутствующий в данных эффект рычага.

На рис. 2 приводится динамика изменения корреляции во времени между рассматриваемыми рядами. Отметим, что при выбранных истинных значениях параметров a и b диапазон изменения корреляции является достаточно большим⁸, при этом динамика ее изменения является весьма интенсивной.

3.2. Сравнение DCC-EGARCH с симметричной DCC-GARCH-моделью

С целью анализа преимущества учета эффекта рычага в предложенной DCC-EGARCH-модели в данном разделе производится сравнительный анализ между симметричной DCC-GARCH-спецификацией и асимметричной DCC-EGARCH-спецификацией. Основной целью подобного анализа является выявление преимущества учета эффекта асимметрии в случае применения моделей на данных, характеризующихся наличием эффекта рычага. То есть важно выяснить, насколько критичным является применение симметричной модели к данным с эффектом асимметрии и, следовательно, существует ли необходимость в разработке и применении асимметричных спецификаций многомерных GARCH-моделей.

В табл. 2 приводятся средние оценки неизвестных параметров по 100 симуляциям, полученные за счет применения как предложенной DCC-EGARCH-моделью, так и симметричной DCC-GARCH моделью, а так-

⁸ $\rho \in [-0,80; 0,94]$.

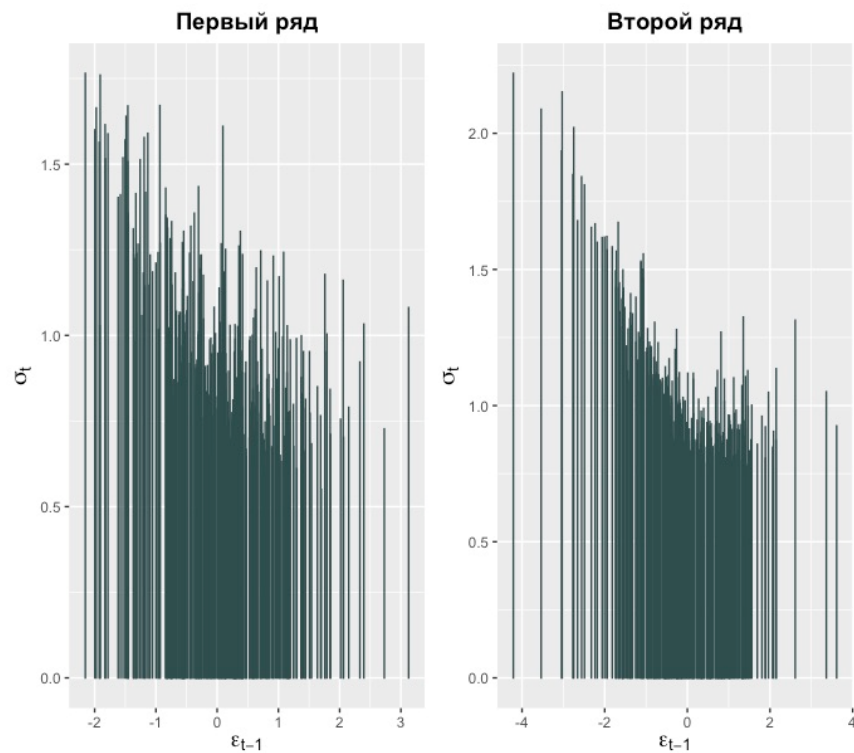


Рис. 1 / Fig. 1. Реакция волатильности на шоки в доходности / Volatility response to shocks in returns

Источник / Source: составлено авторами / compiled by the authors.



Рис. 2 / Fig. 2. Динамика изменения корреляции во времени / Dynamics of correlation over time

Источник / Source: составлено авторами / compiled by the authors.

Сравнение моделей DCC-EGARCH и DCC-GARCH /
The comparison of DCC-EGARCH and DCC-GARCH models

	DCC-EGARCH	RMSE	DCC-GARCH	RMSE		
$\widehat{\mu}_1$	0,50043	0,00989	0,57556	0,07616		
$\widehat{\alpha}_1$	0,15650	0,01949	0,23909	0,09160		
$\widehat{\beta}_1$	0,69698	0,01449	0,41665	0,28679		
$\widehat{\omega}_1$	0,00422	0,00775	0,42178	0,42301		
$\widehat{\gamma}_1$	−0,38740	0,01844	−	−		
$\widehat{\mu}_2$	0,30147	0,01049	0,34372	0,04506		
$\widehat{\alpha}_2$	0,24293	0,02145	0,19880	0,05745		
$\widehat{\beta}_2$	0,49663	0,02966	0,27136	0,24751		
$\widehat{\omega}_2$	0,00680	0,00894	0,58725	0,58823		
$\widehat{\gamma}_2$	−0,29459	0,01483	−	−		
$\hat{a}$	0,50096	0,01049	0,46280	0,03975		
$\hat{b}$	0,20832	0,01703	0,24197	0,04593		
AIC	54 513,010	−	56 382,13	−		
BIC	54 599,534	−	56 454,239	−		
Качество вневыборочного прогноза						
DCC-EGARCH			DCC-GARCH			
Период	$RMSE_{\sigma_1}$	$RMSE_{\sigma_2}$	$RMSE_{\rho}$	$RMSE_{\sigma_1}$	$RMSE_{\sigma_2}$	$RMSE_{\rho}$
$h = 1$	0,03634 (0,88)	0,02700 (0,78)	0,01979 (0,74)	0,18460 (0,12)	0,12051 (0,22)	0,05066 (0,26)
$h = 5$	0,22242 (0,56)	0,17189 (0,43)	0,26866 (0,52)	0,24088 (0,44)	0,17434 (0,57)	0,30764 (0,48)

Примечание: в скобках указаны доли симуляций, при которых модель характеризовалась более низким значением критерия RMSE относительно альтернативной модели.

Источник / Source: составлено авторами / compiled by the authors.

же средние значения информационных критериев AIC и BIC для каждой из оцененных спецификаций. Также отдельно представлены усредненные значения RMSE по симуляциям с целью оценки качества вневыборочного прогноза условных волатильностей и корреляций в каждой из моделей. Кроме того, средние значения RMSE по симуляциям приводятся также для всех оценок коэффициентов.

Исходя из представленных в табл. 2 результатов, можно сделать вывод о том, что асимметричная модель DCC-EGARCH имеет существенное преимущество по сравнению с симметричной спецификацией. Улавливаемый представленным методом эффект рычага обеспечивает значительно более высокую точность оценок коэффициентов по сравнению с DCC-GARCH-спецификацией, демонстрирующей значительную

смещенность в оценках относительно истинных параметров. Кроме того, в пользу существенного преимущества DCC-EGARCH-модели также свидетельствуют значения информационных критериев AIC и BIC, которые значительно меньше по сравнению с DCC-GARCH-методом.

Исходя из средних значений критерия RMSE, посчитанного по оценкам коэффициентов, заметим, что он является существенно более низким в случае рассмотрения асимметричной модели, что свидетельствует в пользу обеспечения DCC-EGARCH-методом более эффективных оценок по сравнению с симметричной спецификацией. Также важно отметить существенно более высокую прогнозную силу у асимметричной модели.

В частности, в ходе анализа рассматривались вневыборочные прогнозы условных волатильностей и корреляций на 1 и 5 шагов вперед. В качестве показателя качества прогнозов использовался критерий RMSE. Дополнительно в скобках указаны доли симуляций, для которых значение RMSE рассматриваемой модели оказалось меньше по сравнению с альтернативной спецификацией. Как видно из табл. 2, модель DCC-EGARCH обладает более высокой прогнозной силой, о чем свидетельствует более низкое относительно DCC-GARCH-модели среднее значение критерия RMSE для каждого из периодов. В особенности стоит выделить существенное превосходство качества асимметричной модели в случае рассмотрения однопериодных прогнозов. Так, исходя из RMSE, симметричная модель уступает DCC-EGARCH в несколько раз в случае рассмотрения однопериодного прогноза условных волатильностей для каждого ряда. В пользу преимущества DCC-EGARCH-модели также свидетельствуют доли симуляций, для которых значение RMSE оказалось ниже в асимметричной модели в сравнении с DCC-GARCH-спецификацией. Таким образом, для асимметричной модели данная доля значительно выше в большинстве случаев, что свидетельствует в пользу более высокой точности вневыборочного прогноза условных волатильностей. Важно отметить, что представленный метод обладает также более высоким качеством предсказаний условной корреляции, о чем свидетельствуют более низкие соответствующие значения критерия RMSE, а также доля симуляций, для которых данный показатель оказался ниже в случае рассмотрения асимметричной спецификации.

Основываясь на результатах анализа, можно заключить, что асимметричная многомерная DCC-EGARCH-модель обладает существенным преимуществом относительно DCC-GARCH-модели в случае рассмотрения данных, характеризующихся нали-

чием эффекта рычага. За счет обеспечения менее смещенных и более эффективных оценок разработанный метод характеризуется как более высоким качеством прогнозной силы, так и самим качеством модели, в пользу чего свидетельствуют более низкие значения информационных критериев. Исходя из этого, разработка и применение представленной асимметричной многомерной DCC-EGARCH-модели являются оправданными, так как наличие эффекта рычага вносит существенные изменения в процесс генерации данных, что обуславливает отсутствие устойчивости оценок симметричной DCC-GARCH-модели к наличию эффекта асимметрии.

4. ПРИМЕНЕНИЕ К РЕАЛЬНЫМ ДАННЫМ

После изучения свойств оценок и сравнения методов с использованием симулированных данных в текущем разделе предложенная DCC-EGARCH-модель применяется для анализа реальных данных. Основной задачей анализа является исследование временных рядов на присутствие эффекта асимметричной реакции дисперсии на шоки в доходности, а также оценка условной корреляции между ними.

4.1. Описание данных

В качестве используемой выборки выступают доходности акций ПАО «НК Роснефть», а также временной ряд изменений цен на нефть марки Brent⁹. Рассматриваемый временной период охватывает интервал с 05.01.2016 по 13.03.2018 г.¹⁰ В качестве рассматриваемых цен выступают дневные цены закрытия, за счет чего объем выборки составляет 550 наблюдений. Источником базы данных для каждого временного ряда выступает ресурс Investing.com¹¹.

Исходя из рис. 3, можно заключить, что динамика изменения исследуемых рядов является схожей. По данной причине можно предположить, что рассматриваемые временные ряды являются коррелированными друг с другом, что требует применения многомерных GARCH-моделей для оценки совместной динамики их условной волатильности. Предположение о наличии корреляции между рассматриваемыми временными рядами обуславливается тем, что финансовые результаты компаний нефтяного сектора имеют высокую зависимость от цен на нефть. При этом корреляционная структура может меняться во времени за счет изменения различных условий на рынке.

⁹ В качестве нефтяных цен выступают цены на фьючерсные контракты с ближайшим периодом экспирации.

¹⁰ Рассматриваемый интервал был выбран ввиду отсутствия на нем структурных сдвигов.

¹¹ Интернет-ресурс Investing.com. URL: <https://www.investing.com/commodities/brent-oil-historical-data>.

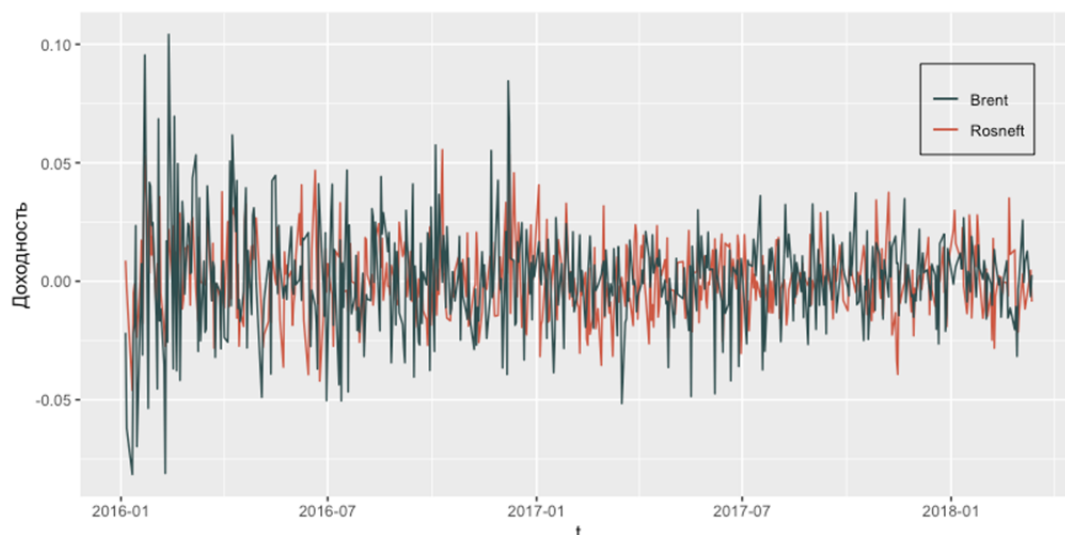


Рис. 3 / Fig. 3. Динамика доходностей акций ПАО «НК Роснефть» и изменений цен на нефть марки Brent / Dynamics of Rosneft stock returns and changes in Brent oil prices

Источник / Source: составлено авторами / compiled by the authors.

4.2. Эконометрический анализ

С целью исследования рассматриваемых рядов доходностей на наличие эффекта рычага, а также оценки условной корреляции между активами, в рамках данного исследования были оценены две различных модели: асимметричная DCC-EGARCH-модель с возможностью учета эффекта рычага, а также ее ограниченная симметричная версия, именуемая далее моделью DCC-EGARCH-R. Заметим, что ограниченная версия отличается от представленной DCC-EGARCH-модели отсутствием коэффициента, отражающего вклад эффекта рычага в уравнении условных дисперсий для каждого из активов, при этом функциональная форма остается аналогичной DCC-EGARCH. Таким образом, уравнение условной дисперсии в DCC-EGARCH-R-спецификации принимает следующий вид:

$$\sigma_t = \sqrt{\exp\left(\omega + \alpha |z_{t-1}| + \gamma z_{t-1} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)\right)}.$$

Заметим, что DCC-EGARCH-R является вложенной в DCC-EGARCH-модель, что позволяет непосредственно оценить вклад эффекта рычага при сравнении данных двух спецификаций¹². Результаты оценки каждой из моделей представлены в табл. 3.

В первую очередь заметим, что исходя из результатов оценки DCC-EGARCH-модели была получена значимая отрицательная оценка коэффициента $\hat{\gamma}_{Brent}$,

¹² Вместо DCC-GARCH-модели была выбрана DCC-EGARCH-R-спецификация с целью выделения вклада эффекта рычага на реальных данных, так как DCC-EGARCH-R-модель имеет одинаковую функциональную форму с предложенным DCC-EGARCH-методом.

отвечающая за эффект рычага. Подобный результат свидетельствует в пользу наличия асимметричного влияния дисперсии на шоки в доходности в случае рассмотрения временного ряда нефтяных цен. Отметим, что оценка коэффициента $\hat{\gamma}_{Brent}$ является отрицательной, что согласуется с концепциями [5–8]. Данное наблюдение означает, что дисперсия реагирует более инерционно на негативные шоки в доходности, чем на позитивные, так как участники финансового рынка склонны воспринимать негативные шоки более критичными [5]. При этом заметим, что в случае рассмотрения временного ряда доходностей акций ПАО «НК Роснефть» не было найдено статистических свидетельств в пользу наличия эффекта асимметрии. Данный вывод обуславливается незначимостью оценки коэффициента $\hat{\gamma}_{Rosneft}$, полученной в результате применения DCC-EGARCH-модели, что свидетельствует в пользу одинакового изменения условной волатильности при положительных и отрицательных шоках. Иными словами, участники финансового рынка склонны в равной степени воспринимать разнонаправленные шоки в доходности рассматриваемого актива. Таким образом, на основе результатов оценки асимметричной DCC-EGARCH-модели было статистически выявлено наличие эффекта рычага при рассмотрении временного ряда цен на нефть марки Brent и его отсутствие на данных ПАО «НК Роснефть».

Представляет интерес также сравнение результатов оценки симметричной DCC-EGARCH-R-модели с представленной асимметричной DCC-EGARCH-спецификацией. Несмотря на то что был получен значимый эффект рычага, симметричная DCC-

Таблица 3 / Table 3

Результаты оценки моделей на реальных данных / Real data model estimation results

	DCC-EGARCH	DCC-EGARCH-R
$\hat{\mu}_{Rosneft}$	0,00073 (0,00065)	0,00070 (0,00062)
$\hat{\alpha}_{Rosneft}$	0,50200*** (0,13114)	0,50951*** (0,13285)
$\hat{\beta}_{Rosneft}$	0,79592*** (0,09335)	0,79121*** (0,09612)
$\hat{\omega}_{Rosneft}$	-1,67902** (0,76465)	-1,71758** (0,78732)
$\hat{\gamma}_{Rosneft}$	-0,01354 (0,05421)	–
$\hat{\mu}_{Brent}$	0,00038 (0,00077)	0,00077 (0,00075)
$\hat{\alpha}_{Brent}$	0,36179*** (0,05603)	0,38123*** (0,05822)
$\hat{\beta}_{Brent}$	0,91751*** (0,02163)	0,91282*** (0,02289)
$\hat{\omega}_{Brent}$	-0,64092*** (0,16855)	-0,67710*** (0,17811)
$\hat{\gamma}_{Brent}$	-0,07114* (0,04075)	–
$\hat{a}$	0,01929 (0,01253)	0,01875 (0,01193)
$\hat{b}$	0,96243*** (0,02802)	0,96389*** (0,02593)
AIC	– 5 707,344	– 5 708,454
BIC	– 5 655,625	– 5 665,355

Примечание: *** – $p < 0,01$, ** – $p < 0,05$, * – $p < 0,1$, в скобках указаны оценки стандартных ошибок.

Источник / Source: составлено авторами / compiled by the authors.

EGARCH-R-модель оказалась лучше асимметричного аналога, о чем говорят немного более низкие значения информационных критериев AIC и BIC в случае рассмотрения симметричной модели. Подобный результат является неожиданным, ввиду наличия значимой оценки коэффициента $\hat{\gamma}_{Brent}$, отвечающего за эффект асимметрии в DCC-EGARCH-модели. Однако важно отметить достаточно небольшое значение полученной оценки коэффициента по модулю в сравнении со вкладами ARCH и GARCH частей¹⁵. При прочих равных, сравнительно малая величина данного коэффициента может приводить

к незначительному влиянию эффекта рычага на динамику условной дисперсии в сравнении с ARCH и GARCH частями.

Следующим важным этапом анализа является рассмотрение оценок параметров, отвечающих за изменение условной корреляционной матрицы во времени между исследуемыми временными рядами. Исходя из табл. 3, несложно заметить, что как в асимметричной DCC-EGARCH-модели, так и в DCC-EGARCH-R-спецификации оценка параметра b является статистически значимой при любом разумном уровне, в то время как оценка коэффициента a незначима. С целью тестирования гипотезы о наличии динамической корреляции между рассматриваемыми

¹⁵ Оценки коэффициентов α и β .

временными рядами был проведен тест отношения правдоподобия (LR) на совместную значимость параметров, определяющих динамику изменения условной корреляции. В результате проведения теста нулевая гипотеза была отвергнута на 5%-ном уровне значимости, что свидетельствует в пользу наличия динамической во времени корреляционной структуры между исследуемыми активами. Данный вывод оправдывает целесообразность применения многомерной DCC-EGARCH-спецификации с целью возможности учета динамической условной корреляции между активами.

С целью проверки гипотезы о нормальном распределении шоков, следуя [25, 26], были использованы тест Колмогорова-Смирнова и тест Шапиро-Уилка в отношении оценок стандартизированных шоков. Для обоих рядов в обеих рассматриваемых моделях гипотеза о нормальном распределении была отвергнута на 1%-ном уровне значимости. Полученные свидетельства в пользу отклонения маргинальных распределений шоков (отдельно для каждого ряда) от нормального также говорят о том, что предположение о многомерном нормальном распределении шоков, вероятно, не соблюдается. Однако в литературе имеются свидетельства в пользу устойчивости оценок GARCH-моделей к нарушению допущения о нормальном распределении [27]. С целью проверки устойчивости полученных в исследовании результатов каждый из двух рядов был оценен с помощью одномерной EGARCH-модели при различных допущениях о распределении случайных шоков. Использовались распределение Стьюдента, нецентрированное распределение Стьюдента и обобщенное нормальное распределение (GED). Значимости и знаки коэффициентов остались прежними, что свидетельствует в пользу устойчивости полученного результата к нарушению допущения о нормальности. Проверка устойчивости оценок a и b требует ослабления допущения не только о маргинальной нормальности шоков, но и о том, что связь между шоками описывается при помощи Гауссовой копулы. Реализация соответствующей модели является потенциально интересной, но технически затруднительной, остающейся на долю последующих исследований.

ВЫВОДЫ

В данном исследовании была предложена многомерная асимметричная DCC-EGARCH-модель. Разработанный метод позволяет оценивать совместную динамику условной волатильности и корреляции нескольких активов с возможностью учета эффекта рычага на финансовых рынках. Реализация предложенного метода осуществляется за счет

обобщения асимметричной EGARCH-модели на многомерный случай с использованием в качестве базиса многомерной DCC-GARCH-спецификации. Преимуществами данного подхода являются ослабление предпосылки об инвариантности корреляционной матрицы относительно времени, а также существенное упрощение оптимизационной задачи за счет применения двухшаговой процедуры оценивания. Данные особенности оправдывают разработку рассматриваемой модели, так как предшествующие многомерные асимметричные BEKK-GARCH-модели [12, 13] характеризовались феноменом «проклятие размерности», а существующие адаптации EGARCH-процесса к многомерному случаю [14, 15] предполагали постоянство корреляционной матрицы во времени.

Важно отметить, что свойства оценок предложенного метода были исследованы с применением анализа симулированных данных. В результате были найдены статистические свидетельства в пользу обеспечения DCC-EGARCH-методом более эффективных оценок в сравнении с симметричной DCC-GARCH-моделью при рассмотрении процесса генерации данных с присутствием эффекта рычага. Кроме того, предложенный метод смог обеспечить более высокое качество вневыборочных прогнозов на 1 и 5 периодов вперед.

После проведения анализа симулированных данных DCC-EGARCH-метод был применен для моделирования совместной динамики условной волатильности и корреляции акций ПАО «Роснефть» и цен на нефть марки Brent. В результате анализа были найдены статистические свидетельства в пользу наличия эффекта асимметрии на данных, представленных нефтяными ценами, что оправдывает применение асимметричной DCC-EGARCH-спецификации. Однако, несмотря на значимость эффекта рычага, применение симметричного аналога продемонстрировало немного более низкие значения информационных критериев в сравнении с представленным методом, что может быть обусловлено слабым влиянием асимметричного восприятия шоков на волатильность рассмотренных активов. Наконец, важно отметить, что были найдены статистические свидетельства в пользу наличия значимой динамической корреляционной структуры между рассматриваемыми временными рядами, что оправдывает применение многомерных спецификаций с динамической корреляционной матрицей для моделирования совместной динамики рассматриваемых активов.

В заключение отметим, что, исходя из анализа симулированных данных предложенная DCC-EGARCH модель обладает существенным преимуществом в сравнении с классической DCC-GARCH-специфи-

кацией за счет возможности учета эффекта рычага. Тем не менее в дальнейших исследованиях представляет интерес применение разработанной спецификации на данных, характеризующихся наличием

более выраженного эффекта рычага, за счет чего асимметричная многомерная DCC-EGARCH модель может продемонстрировать серьезное преимущество в сравнении с симметричными аналогами.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках научного проекта «Развитие и применение методов эконометрического оценивания параметров экономических моделей с учетом эндогенности и неслучайного отбора наблюдений» при поддержке Российского научного фонда (РНФ), номер проекта: 21–18–00427. Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия.

ACKNOWLEDGEMENTS

This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF) under research project “Development and application of methods for econometric estimation of parameters of economic models using endogenous and non-random sampling in observations”, project number: 21–18–00427. National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Markowitz H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*. 1952;7(1):77–91. DOI: 10.1111/j.1540–6261.1952.tb01525.x
2. Sharpe W.F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*. 1964;19(3):425–442. DOI: 10.1111/j.1540–6261.1964.tb02865.x
3. Miralles-Marcelo J.L., Miralles-Quirós J.L., Miralles-Quirós M. del M. Multivariate GARCH Models and risk minimizing portfolios: The importance of medium and small firms. *The Spanish Review of Financial Economics*. 2013;11(1):29–38. DOI: 10.1016/j.srfe.2013.03.001
4. Sia C.S., Chan F. Can multivariate GARCH models really improve value-at-risk forecasts? In: Proc. 21st Int. congr. on modelling and simulation (Gold Coast, Nov. 29-Dec. 04, 2015). Canberra: Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand Inc; 2015. DOI: 10.36334/MODSIM.2015.E 5.sia
5. Zhang X.F. Information uncertainty and stock returns. *The Journal of Finance*. 2006;61(1):105–137. DOI: 10.1111/j.1540–6261.2006.00831.x
6. Nelson D.B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*. 1991;59(2):347–370. DOI: 10.2307/2938260
7. Black F. Studies of stock price volatility changes. In: Proc. 1976 Meet. Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association. Alexandria, VA: ASA; 1976:177–181.
8. Christie A. The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*. 1982;10(4):407–432. DOI: 10.1016/0304–405X(82)90018–6
9. Kahneman D., Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*. 1979;47(2):263–292. DOI: 10.2307/1914185
10. Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*. 1993;48(5):1779–1801. DOI: 10.1111/j.1540–6261.1993.tb05128.x
11. Sentana E. Quadratic ARCH models. *The Review of Economic Studies*. 1995;62(4):639–661. DOI: 10.2307/2298081
12. Kroner K.F., Ng V.K. Modeling asymmetric comovements of asset returns. *The Review of Financial Studies*. 1998;11(4):817–844. DOI: 10.1093/rfs/11.4.817
13. Aftab H., Beg R.A., Sun S., Zhou Z. Testing and predicting volatility spillover — A multivariate GJR-GARCH approach. *Theoretical Economics Letters*. 2019;9(1):83–99. DOI: 10.4236/tel.2019.91008
14. Koutmos G., Booth G.G. Asymmetric volatility transmission in international stock markets. *Journal of International Money and Finance*. 1995;14(6):747–762. DOI: 10.1016/0261–5606(95)00031–3
15. Jane T. der, Ding C.G. On the multivariate EGARCH model. *Applied Economics Letters*. 2009;16(17):1757–1761. DOI: 10.1080/13504850701604383
16. Engle R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*. 2002;20(3):339–350. DOI: 10.1198/073500102288618487

17. Newey W.K., McFadden D. Large sample estimation and hypothesis testing. In: Engle R.F., McFadden D.L., eds. *Handbook of econometrics*. Amsterdam: Elsevier Science B.V.; 1994;4:2111–2145. DOI: 10.1016/S 1573-4412(05)80005-4
18. Bollerslev T. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *The Review of Economics and Statistics*. 1990;72(3):498–505. DOI: 10.2307/2109358
19. Huang Y., Su W., Li X. Comparison of BEKK GARCH and DCC GARCH models: An empirical study. In: Proc. 6th Int. conf. on advanced data mining and applications (Chongqing, Nov. 19–21, 2010). Cham: Springer-Verlag; 2010:99–110. (Lecture Notes in Computer Science. Vol. 6441). DOI: 10.1007/978-3-642-17313-4_10
20. Orskaug E. Multivariate DCC-GARCH model — with various error distributions. Oslo: Norwegian Computing Center; 2009. 88 p. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.417.5480&rep=rep1&type=pdf>
21. Engle R.F., Kroner K.F. Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*. 1995;11(1):122–150. DOI: 10.1017/S 0266466600009063
22. Engle R.F., Granger C.W.J., Kraft D. Combining competing forecasts of inflation using a bivariate arch model. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1984;8(2):151–165. DOI: 10.1016/0165-1889(84)90031-9
23. Bollerslev T., Engle R.F., Wooldridge J.M. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*. 1988;96(1):116–131. DOI: 10.1086/261527
24. Engle R.F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. 1982;50(4):987–1007. DOI: 10.2307/1912773
25. Ghoudi K., Rémillard B. Comparison of specification tests for GARCH models. *Computational Statistics & Data Analysis*. 2014;76:291–300. DOI: 10.1016/j.csda.2013.03.009
26. Harrison B., Paton D. Do fat tails matter in GARCH estimation: Testing market efficiency in two transition economies. *Economic Issues*. 2007;12(2):15–26. URL: <http://www.economicissues.org.uk/Files/207Harrison.pdf>
27. Bollerslev T., Wooldridge J.M. Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews*. 1992;11(2):143–172. DOI: 10.1080/07474939208800229

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / ABOUT THE AUTHORS



Юрий Сергеевич Трифонов — научный сотрудник, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Juri S. Trifonov — Research Associate, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

<https://orcid.org/0000-0001-7832-7335>

Автор для корреспонденции / Corresponding author

jutrif98@gmail.com



Богдан Станиславович Потанин — кандидат экономических наук, старший преподаватель, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Bogdan S. Potanin — Cand. Sci. (Econ.), Senior Lecturer, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

<https://orcid.org/0000-0002-5862-9202>

bogdanpotanin@gmail.com

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest Statement: The authors have no conflicts of interest to declare.

Статья поступила в редакцию 30.06.2021; после рецензирования 15.07.2021; принята к публикации 17.12.2021. Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

The article was submitted on 30.06.2021; revised on 15.07.2021 and accepted for publication on 17.12.2021.

The authors read and approved the final version of the manuscript.