

DOI: 10.26794/2587-5671-2022-26-3-186-195

УДК 336.767.3:51(045)

JEL G120, Y80

Процентный риск облигаций в условиях изменяющейся ключевой ставки

Н.В. Попова

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена анализу поведения процентного риска облигаций в условиях изменяющейся ключевой процентной ставки. Как известно, ключевая ставка – это инструмент денежно-кредитного регулирования Центрального банка Российской Федерации. В периоды нестабильности ключевая ставка может меняться, что влечет изменения доходностей на рынке облигаций. Последнее, в свою очередь, означает подверженность облигаций на российском рынке процентному риску. При инвестициях в облигации федерального займа (ОФЗ) процентный риск становится основным видом риска, поскольку кредитный риск таких облигаций отсутствует. **Цель** исследования – получить доказательство зависимости процентного риска облигаций от срока до погашения. Для решения этой задачи использованы **методы** дифференциального исчисления. **Новизна** работы состоит в том, что подобное доказательство отсутствует в литературе. Нестабильность процентных ставок на рынке сохраняется и в настоящее время, что позволяет говорить об **актуальности** данной работы. **Результаты:** установлено, что при фиксированных значениях купонной ставки, начальной доходности и величины изменения процентной ставки процентный риск облигаций увеличивается с увеличением срока до погашения. Для долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом, существует срок максимума процентного риска. Получена формула для приближенного значения срока максимума. Доказанные утверждения подтверждаются вычислениями, согласуются с ранее выполненным исследованием и соответствуют рыночным наблюдениям. **Вывод:** полученное в статье доказательство зависимости процентного риска облигаций от срока до погашения может быть использовано для анализа поведения процентного риска облигаций в условиях изменяющейся ключевой процентной ставки. **Практическая значимость** работы: результаты работы могут быть полезны эмитенту и инвестору, а также в теории при изучении инвестиционных свойств облигаций.

Ключевые слова: облигации; процентный риск; математические методы; срок до погашения; ключевая процентная ставка

Для цитирования: Попова Н.В. Процентный риск облигаций в условиях изменяющейся ключевой ставки. *Финансы: теория и практика.* 2022;26(3):186-195. DOI: 10.26794/2587-5671-2022-26-3-186-195

ORIGINAL PAPER

Interest Rate Risk of Bonds in the Condition of a Changing Key Rate

N.V. Popova

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

ABSTRACT

The article is devoted to the analysis of the behavior of the interest rate risk of bonds in the conditions of a changing key interest rate. As known, the key rate is an instrument of monetary regulation of the Central Bank of the Russian Federation. During periods of instability, the key rate may change, which leads to changes in yields in the bond market. The latter, in turn, means that bonds on the Russian market are exposed to interest rate risk. When investing in federal loan bonds (OFZ), interest rate risk becomes the main type of risk, since there is no credit risk in such bonds. **The aim** of the paper is to obtain proof of the dependence of the interest rate risk of bonds on the term to maturity. The author applies **methods** of differential calculus to obtain the proof. **The novelty** of the research is that there is no similar proof in the literature. The instability of interest rates in the market persists at the present time, which allows us to speak about the **relevance** of this work. **Results:** it is established that with fixed values of the coupon rate, initial yield and the amount of interest rate change, the interest risk of bonds increases with an increase in the term to maturity. For long-term bonds sold at a discount, there is a term of a maximum interest rate risk. The formula for the approximate value of the term of maximum is obtained. Proven statements are confirmed by calculations, are consistent with previously performed studies, and are in line with market observations. The author comes to the **conclusion** that the proof obtained in the article of the dependence of the interest rate risk of bonds on the term to maturity can be used to analyze the

behavior of the interest rate risk of bonds in the conditions of a changing key interest rate. **The practical significance:** the results of the research can be useful to the issuer and investor, as well as in theory when studying the investment properties of bonds.

Keywords: bonds; interest rate risk; mathematical methods; term to maturity; key interest rate

For citation: Popova N.V. Interest rate risk of bonds in the condition of a changing key rate. *Finance: Theory and Practice*. 2022;26(3):186-195. DOI: 10.26794/2587-5671-2022-26-3-186-195

ВВЕДЕНИЕ

В периоды экономических кризисов или экономических трудностей обостряются риски инвестирования. Перечень видов риска инвестиций в облигации приведен в книге Ф. Дж. Фабоцци [1]. Для облигаций выделяют два основных вида риска: риск изменения процентных ставок (процентный риск) и кредитный риск, В.В. Россохин [2]. Кредитный риск, или риск дефолта, — это риск невыполнения эмитентом своих обязательств по выплате платежей по облигации. На рынках инструментов с фиксированным доходом без кредитного риска основным видом риска является процентный риск, О.В. Буклемишев [3]. Аналогично утверждение F. J. Fabozzi [4, p. 1]: «Основным риском, с которым сталкиваются участники рынка облигаций, является процентный риск».

В работе Ф. Дж. Фабоцци [1, с. 22] дано определение процентного риска: «процентный риск — это риск роста процентных ставок, ведущий к понижению цен на облигации». В литературе также приводится более широкое определение процентного риска как «возможности изменения цены облигации под воздействием изменений процентных ставок» [3, с. 208]. Работы [2, 5–12] посвящены исследованиям различных видов риска инвестиций в облигации, в том числе анализу факторов, способствующих изменению рыночных процентных ставок. Основными из макроэкономических факторов авторы называют инфляцию, процентную ставку, политический и экономический риски. Согласно работе А.К. Исаева и В.Н. Демьянова [5] инфляция валюты, в которой номинирован конкретный выпуск, является фундаментальным фактором, определяющим доходность корпоративных облигаций в конкретной стране. По утверждению Л. Дж. Гитмана и М.Д. Джонка [13, с. 467], «фактически инвесторов более всего беспокоит инфляция. Она не только подтачивает покупательную способность основной суммы займа, но и оказывает сильное влияние на динамику процентных ставок». В России для регулирования уровня инфляции Банк России использует ключевую процентную ставку [14, 15]. Величина ключевой ставки оказывает влияние на доходности облигаций. В статье И.М. Балкоева [16] рассмотрен

механизм изменения рыночных доходностей под влиянием изменения ключевой ставки. В итоге, согласно [16, с. 35], «влияние ставки ЦБ на облигации заключается в том, что при ее увеличении вырастают и доходности на облигационном рынке, а при ее снижении облигационные доходности так же пропорционально снижаются». Влияние ключевой ставки на повышение рыночных процентных ставок можно было наблюдать на российском рынке облигаций в 2021 г. Банк России с целью снижения инфляции в марте 2021 г. начал повышать ключевую процентную ставку и поднял этот показатель на 4,25 п.п. — до 8,5% в декабре. По данным Московской биржи¹ за период с марта по декабрь 2021 г., рост ключевой ставки сопровождался увеличением доходностей на рынке облигаций и, как следствие, увеличением количества облигаций, продающихся с дисконтом. При этом облигации, купленные на российском рынке до марта 2021 г., оказались подвержены значительному процентному риску.

В ряде работ отмечается, что такие параметры облигации, как купонная ставка, срок до погашения, а также доходность к погашению оказывают влияние на величину процентного риска облигации. Согласно Ф. Дж. Фабоцци [1, с. 22] «чувствительность цены каждого конкретного выпуска к изменению рыночных процентных ставок зависит от параметров облигации, а именно — от величины купонной ставки и срока до погашения». Влияние доходности к погашению, или, что то же самое, уровня процентных ставок рынка, на процентное изменение цены облигации доказано в статье [17] и формулируется следующим образом: при данном сроке до погашения и купонной ставке чем выше начальный уровень доходности, тем меньше относительное (процентное) изменение цены облигации при изменении ее доходности на заданную величину. Таким образом, «при данном изменении доходностей волатильность цен выше на рынке, где уровни доходности низки, и наоборот: при высоких уровнях доходности волатильность невелика» [1, с. 95]. Влияние купонной ставки на процентный

¹ Сайт Московской биржи. URL: <http://www.moex.com/> (дата обращения: 10.05.2022).

риск облигации доказано в работе [18] и формулируется следующим образом: при данном сроке до погашения и начальной доходности относительное (процентное) изменение цены облигации при изменении ее доходности на заданную величину тем больше, чем ниже купонная ставка. Исследования влияния купонной ставки в работах [6, 10] подтверждают данное утверждение. Например, [6, р. 254]: «По сравнению с купонными облигациями облигации с нулевым купоном более подвержены волатильности цен из-за колебаний рыночной процентной ставки». По результатам исследований в работе [6] сделан вывод, что купонная ставка является важной характеристикой выпуска, но важность ее не так высока, как срок до погашения облигации.

Согласно [1] срок до погашения является ключевой характеристикой облигации, имеет первостепенное значение при оценке любой облигации. Авторы работ [2, 5, 6, 10, 11] рассматривают срок до погашения как значительный фактор риска инвестиции в облигации в первую очередь из-за подверженности облигаций процентному риску. По утверждению [10, р. 626], облигации с более длительным сроком погашения прямо указывают на то, что эти облигации подвержены рискам. Прежде всего, рискам, связанным с процентными ставками, отражающими динамику экономики и бизнеса. Согласно [6, р. 248] потенциал для больших рисков, скорее всего, возникнет при долгосрочных инвестициях. Этот большой потенциальный риск обусловлен подверженностью облигаций риску изменения процентных ставок и риску изменения цен. Вследствие этого облигации с более длительным сроком погашения требуют гарантий, которые обычно характеризуются высокими требованиями к ставке доходности к погашению. По утверждению [5, с. 139], «как правило, инвесторов интересует большая премия за риск при покупке “длинных” облигаций, поскольку за долгий срок обращения неопределенность выше». Авторы ряда работ отмечают связь величины процентного риска со сроком до погашения. Согласно [10, р. 621] в результате изменения процентных ставок «более значительные изменения цен произойдут в облигациях с более длительными сроками погашения». Этот вывод согласуется с утверждением в работе [6, р. 255, 256]: «облигации с более длительным сроком погашения, как правило, подвержены более высокой волатильности цен на рынке облигаций», а также в работе [2, с. 18]: «более “длинные” облигации должны обеспечивать инвестору дополнительную премию за риск, связанный с более высокой дюрацией и волатильностью». Заметим, что все приведенные

утверждения о связи величины процентного риска и срока до погашения сформулированы на основе рыночных наблюдений.

Процентный риск облигации оценивают по величине относительного (процентного) изменения цены облигации при изменении рыночной процентной ставки на заданную величину $\Delta P/P$. На практике процентный риск облигаций оценивают с помощью показателей дюрации и выпуклости. Согласно F.J. Fabozzi [4, р. 1] «типичным способом измерения процентного риска является аппроксимация влияния изменения процентных ставок на облигацию или портфель облигаций с помощью показателей дюрации и выпуклости». Данное утверждение подтверждают работы, посвященные оценке процентного риска облигаций [19–24].

В связи с принятым способом оценки процентного риска влияние срока до погашения на процентный риск облигации устанавливается, как правило, на основе зависимости дюрации облигации от срока до погашения. В литературе имеются математические доказательства зависимости дюрации облигации от срока до погашения [20, 25–27]. При этом задаче доказательства зависимости непосредственно процентного риска облигации от срока до погашения в литературе уделено значительно меньше внимания, в связи с чем теория инвестирования в финансовые инструменты с фиксированным доходом представляется неполной. В статье [28] для решения задачи о влиянии срока до погашения на процентное изменение цены облигации при изменении доходности на заданную величину рассматривались числовые последовательности вида $\{\Delta P_n/P_n\}$, где номер члена последовательности n совпадал с числом купонных периодов, оставшихся до погашения облигации. В данной статье для решения задачи использовались методы дифференциального исчисления.

Согласно Ф. Дж. Фабоцци [1, с. 95] формулировка зависимости процентного риска облигации от срока до погашения выглядит следующим образом: «При данной купонной ставке и начальной доходности чем дольше срок до погашения, тем выше волатильность цены». В данной статье эта формулировка уточняется.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассматривается задача о зависимости процентного риска купонной облигации от срока до погашения. Как уже отмечалось, процентный риск облигации оценивают по величине относительного (процентного) изменения цены облигации $\Delta P/P$

при изменении рыночной процентной ставки на заданную величину. Пусть r и $P(r)$ — годовая доходность и цена облигации в начальный момент времени. Изменение цены облигации будем рассматривать для мгновенного изменения рыночной процентной ставки, аналогично Ф. Дж. Фабоцци [1, с. 93]. Пусть $\tilde{r}$ — доходность облигации в результате мгновенного изменения процентной ставки на величину $\Delta r > 0$. Если $\tilde{r} = r - \Delta r$, то $\tilde{r} < r$ — ставка мгновенно снизилась; если же $\tilde{r} = r + \Delta r$, то $\tilde{r} > r$ — ставка мгновенно увеличилась. Цена облигации станет равной $P(\tilde{r})$.

Так как доходность и цена облигации изменяются в противоположных направлениях, то $P(\tilde{r}) > P(r)$, если $\tilde{r} < r$ и $P(\tilde{r}) < P(r)$, если $\tilde{r} > r$. Величину

$$\frac{P(\tilde{r}) - P(r)}{P(r)}, \text{ где } \tilde{r} < r, \quad (1)$$

называют относительным (процентным) ростом, а величину

$$\frac{P(r) - P(\tilde{r})}{P(r)}, \text{ где } \tilde{r} > r, \quad (2)$$

— относительным (процентным) снижением цены облигации². Заметим, что это положительные величины.

Чтобы установить характер зависимости относительного изменения цены облигации $\Delta P/P$ от срока до погашения n , достаточно рассматривать облигации, купонные платежи по которым выплачиваются один раз в год. В выражениях (1) и (2) будем рассматривать цены, не содержащие накопленного купонного дохода, т.е. котируемые цены облигации сразу после купонной выплаты, когда до погашения остается n купонных периодов.

Влияние срока до погашения n на величину относительного изменения цены облигации будем изучать путем дифференцирования по переменной n функции (1) в случае $\tilde{r} < r$ и функции (2) в случае $\tilde{r} > r$ ³. В случае $\tilde{r} < r$ получим:

$$\left(\frac{P(\tilde{r}) - P(r)}{P(r)} \right)'_n = \frac{P(\tilde{r})}{P(r)} \left(\frac{P'_n(\tilde{r})}{P(\tilde{r})} - \frac{P'_n(r)}{P(r)} \right). \quad (3)$$

² Лобанов А.А., Чугунов А.В., ред. Энциклопедия финансового риск-менеджмента. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Альпина Бизнес Букс; 2005. 53 с.

³ Дифференцирование по целочисленной переменной применяется в изучении инвестиционных свойств облигаций. Например, в работах G.A. Hawawini [25], B. Malkiel [29].

При $\tilde{r} > r$ получим:

$$\left(\frac{P(r) - P(\tilde{r})}{P(r)} \right)'_n = \frac{P(\tilde{r})}{P(r)} \left(\frac{P'_n(r)}{P(r)} - \frac{P'_n(\tilde{r})}{P(\tilde{r})} \right). \quad (4)$$

Чтобы установить знаки производных в выражениях (3) и (4), необходимо установить знак разности

$$\left(\frac{P'_n(\tilde{r})}{P(\tilde{r})} - \frac{P'_n(r)}{P(r)} \right) \text{ в выражении (3) и знак разности}$$

$$\left(\frac{P'_n(r)}{P(r)} - \frac{P'_n(\tilde{r})}{P(\tilde{r})} \right) \text{ в выражении (4). Для этого функцию}$$

$\frac{P'_n(r)}{P(r)}$ необходимо исследовать на монотонность по переменной r .

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Теорема. При заданных значениях купонной ставки f , начальной доходности к погашению r и величины изменения процентной ставки $\Delta r > 0$ справедливы следующие утверждения:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta r}{\tilde{r}};$$

2) процентный риск облигации, продающейся по номиналу или с премией, увеличивается с увеличением срока до погашения;

3) для облигаций, продающихся с дисконтом, существует срок максимума процентного риска.

Доказательство. По условию, r — начальная доходность к погашению облигации. Тогда цена облигации в начальный момент равна:

$$P(r) = A(1+r)^{-n} \left(1 - \frac{f}{r} \right) + A \frac{f}{r}, \quad (5)$$

где A — номинал облигации; n — срок до погашения.

Если $\tilde{r}$ — доходность облигации в результате мгновенного изменения процентной ставки на величину $\Delta r > 0$, то цена облигации станет равной:

$$P(\tilde{r}) = A(1+\tilde{r})^{-n} \left(1 - \frac{f}{\tilde{r}} \right) + A \frac{f}{\tilde{r}}. \quad (6)$$

1. Пользуясь формулами (5) и (6), найдем предел выражений (1) и (2) при $n \rightarrow \infty$. Получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta r}{\tilde{r}}, \text{ где } \tilde{r} = r \pm \Delta r.$$

Для доказательства следующих утверждений теоремы необходимо исследовать на монотонность

функцию $\frac{P'_n(r)}{P(r)}$ по переменной r . Эта функция

имеет вид:

$$\frac{P'_n(r)}{P(r)} = \frac{(f-r)\ln(1+r)}{r + f((1+r)^n - 1)}. \quad (7)$$

Дифференцируем эту функцию по переменной r . Затем используем приближенные равенства:

$$(1+r)^n \approx 1+rn, \ln(1+r) \approx r.$$

Получим:

$$\left(\frac{P'_n(r)}{P(r)}\right)' \approx \frac{r^2}{B^2(1+r)}[(r-f)fn^2 - f(1+r)n - (1+f)], \quad (8)$$

где B^2 — квадрат знаменателя правой части равенства (7).

Докажем второе и третье утверждения теоремы.

2. При условии $f \geq r$, т.е. для облигаций, продающихся по номиналу или с премией, выражение (8) отрицательно. Значит, для этих облигаций

$$\left(\frac{P'_n(r)}{P(r)}\right)' < 0 \text{ — отношение } \frac{P'_n(r)}{P(r)} \text{ является убывающей функцией переменной } r.$$

Тогда если $\tilde{r} < r$,

$$\text{то } \frac{P'_n(\tilde{r})}{P(\tilde{r})} > \frac{P'_n(r)}{P(r)} \text{ и выражение (3) положительно,}$$

$$\text{что означает } \left(\frac{P(\tilde{r}) - P(r)}{P(r)}\right)'_n > 0. \text{ Если же } \tilde{r} > r,$$

$$\text{то } \frac{P'_n(\tilde{r})}{P(\tilde{r})} < \frac{P'_n(r)}{P(r)} \text{ и выражение (4) положительно,}$$

$$\text{что означает } \left(\frac{P(r) - P(\tilde{r})}{P(r)}\right)'_n > 0. \text{ Таким образом,}$$

при любом изменении процентных ставок процентный риск облигаций, продающихся по номиналу или с премией, увеличивается с увеличением срока до погашения. Второе утверждение теоремы доказано.

3. При условии $f < r$, т.е. для облигаций, продающихся с дисконтом, выражение (8) с увеличением n изменяет знак при некотором значении срока n_0

с минуса на плюс. Это следует из выражения в квадратных скобках, где стоит квадратный трехчлен относительно n с положительным коэффициентом при n^2 и отрицательным значением одного из корней.

$$\text{Если } n < n_0, \text{ то } \left(\frac{P'_n(r)}{P(r)}\right)'_r < 0 \text{ — отношение}$$

$$\frac{P'_n(r)}{P(r)} \text{ является убывающей функцией переменной } r.$$

Тогда при любом изменении процентных ставок выражения (3) и (4) положительны, что означает

$$\left(\frac{P(\tilde{r}) - P(r)}{P(r)}\right)'_n > 0 \text{ при } \tilde{r} < r$$

$$\text{и } \left(\frac{P(r) - P(\tilde{r})}{P(r)}\right)'_n > 0 \text{ при } \tilde{r} > r. \text{ Следовательно,}$$

при сроках до погашения $n < n_0$ процентный риск облигаций, продающихся с дисконтом, увеличивается с увеличением срока до погашения.

$$\text{Если же } n > n_0, \text{ то } \left(\frac{P'_n(r)}{P(r)}\right)'_r > 0 \text{ — отношение}$$

$$\frac{P'_n(r)}{P(r)} \text{ является возрастающей функцией переменной } r.$$

Тогда при любом изменении процентных ставок выражения (3) и (4) отрицательны, что означает

$$\left(\frac{P(\tilde{r}) - P(r)}{P(r)}\right)'_n < 0 \text{ при } \tilde{r} < r$$

$$\text{и } \left(\frac{P(r) - P(\tilde{r})}{P(r)}\right)'_n < 0 \text{ при } \tilde{r} > r. \text{ Следовательно,}$$

при сроках до погашения $n > n_0$ процентный риск облигаций, продающихся с дисконтом, уменьшается с увеличением срока до погашения.

$$\text{Из условий } \left(\frac{\Delta P}{P}\right)'_n > 0 \text{ при } n < n_0$$

$$\text{и } \left(\frac{\Delta P}{P}\right)'_n < 0 \text{ при } n > n_0 \text{ следует, что } n_0 \text{ — это}$$

срок максимума процентного риска облигаций, продающихся с дисконтом. Приравнявая к нулю выражение (8), найдем приближенное значение срока n_0 :

Таблица 1

Зависимость $\Delta P/P$ от n ($f > r$) /
 Dependence $\Delta P/P$ on n ($f > r$)
 $f = 10\%, r = 8\%, \Delta r = 0,1\%, \tilde{r} = 8,1\%$

n	$\Delta P/P$
1	0,000925
2	0,001767
3	0,002535
4	0,003237
5	0,003882
8	0,005525
10	0,006421
15	0,008152
20	0,009360
25	0,010215
30	0,010823
35	0,011258
40	0,011570
50	0,011952
60	0,012147
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta r}{\tilde{r}}$	0,012346

Таблица 2

Зависимость $\Delta P/P$ от n ($f < r$) /
 Dependence $\Delta P/P$ on n ($f < r$)
 $f = 10\%, r = 13\%, \Delta r = 0,1\%, \tilde{r} = 13,1\%$

n	$\Delta P/P$
1	0,00088417
3	0,00240759
5	0,00363531
10	0,00568087
20	0,00725052
30	0,00758621
40	0,00763938
43	0,00764171
44	0,00764198
45	0,00764208
46	0,00764205
47	0,00764192
50	0,00764109
55	0,00763923
60	0,00763749
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta r}{\tilde{r}}$	0,00763359

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

$$n_0 \approx \frac{f(1+r) + \sqrt{f^2(1+r)^2 + 4(r-f)f(1+f)}}{2(r-f)f}. \quad (9)$$

Теорема доказана.

Доказанные в теореме утверждения о поведении процентного риска подтверждаются вычислениями по формулам (1) и (2) относительных изменений цен облигаций, продающихся с премией или с дисконтом, для различных сроков до погашения. Примеры таких вычислений показаны в табл. 1 и 2. Заметим, что в этих таблицах значения $\Delta P/P$ с увеличением n приближаются к своим предельным значениям, полученным по формуле из утверждения 1 теоремы. Из табл. 2 следует, что срок максимума величины $\Delta P/P$ при увеличении доходности на $\Delta r = 0,1\%$ облигации с купонной ставкой $f = 10\%$ и начальной доходностью $r = 13\%$ составляет $n_0 = 45$ лет.

В работе [28] для облигаций, продающихся с дисконтом, было получено следующее выражение для приближенного значения срока максимума величины $\Delta P/P$:

$$n_0 \approx 1 + \frac{(r+1)(2r-f) + \sqrt{f^2(r-1)^2 + 4r(r-f+rf)}}{2r(r-f)}. \quad (10)$$

В табл. 3 приведены точные и приближенные значения срока n_0 при заданных значениях купонной ставки f и величины изменения процентной ставки $\Delta r > 0$ для различных значений начальной доходности r . Точные значения срока n_0 получены из непосредственных вычислений по формулам (1) и (2) относительных изменений цен облигаций, продающихся с дисконтом, для различных сроков до погашения n . Приближенные значения срока n_0 получены по формулам (9) и (10).

Таблица 3

Точные и приближенные значения срока n_0 по формулам (9), (10) / Exact and approximate values of the term according to formulas (9), (10)
 $f = 10\%, \Delta r = 0,1\% (f < r)$

$r\%$	11	12	13	15	20	25
n_0 точное, $\tilde{r} < r$, (1)	127	66	47	30	18	13
n_0 точное, $\tilde{r} > r$, (2)	115	63	45	30	18	13
n_0 (9)	120	64,5	45,7	30,3	18,1	13,7
n_0 (10)	121,1	65,3	46,4	30,7	18,0	13,3

Источник / Source: составлено автором / compiled by the author.

Как видим, результаты вычислений согласуются между собой. С увеличением разности $(r - f)$ точные и приближенные значения срока n_0 сближаются. Как следует из формул (9), (10) и вычислений, срок максимума увеличивается с уменьшением разности $(r - f)$ и при близких значениях купонной ставки и доходности практически отсутствует.

ВЫВОДЫ

Рассмотрены макроэкономические факторы процентного риска, такие как инфляция и ключевая процентная ставка. Отмечена роль параметров облигации в уровне процентного риска. Срок до погашения является значительным фактором риска инвестиции в облигации прежде всего из-за подверженности облигаций

процентному риску. Полученное в статье доказательство зависимости процентного риска облигаций от срока до погашения подтверждается вычислениями и может быть использовано для анализа поведения процентного риска облигаций в условиях изменяющейся ключевой процентной ставки.

Результаты получены при условии горизонтальности кривой рыночных доходностей и параллельности ее перемещений. В реальности кривая доходностей не является горизонтальной и ее сдвиги не обязательно параллельны. Однако известно, что инвестиционные свойства облигаций изучаются при указанных условиях. Результаты исследования могут быть полезны эмитенту и инвестору, а также в теории при изучении инвестиционных свойств облигаций.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Фабозци Ф. Дж. Рынок облигаций: Анализ и стратегии. 2-е изд. Пер. с англ. М.: Альпина Бизнес Букс; 2007. 950 с.
2. Россохин В. В. Анализ учета факторов риска в доходности облигаций. М.: Интернаука; 2019. 112 с.
3. Буклемишев О. В. Рынок еврооблигаций. М.: Дело; 1999. 232 с.
4. Fabozzi F. J. Duration estimation for bonds and bond portfolios. In: Fabozzi F. J., ed. Handbook of finance (in 3 vols.). Vol. III. Valuation, financial modeling, and qualitative tools. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2008. URL: <https://doi.org/10.1002/9780470404324.hof003015>
5. Исаев А. К., Демьянов В. Н. Анализ факторов, влияющих на доходность корпоративных облигаций. Исследование и проектирование интеллектуальных систем в автомобилестроении, авиастроении и машиностроении (ISMCA' 2018). (Таганрог, 19–20 апреля 2018 г.). Мат. Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием. Таганрог: ЭльДирект; 2018:136–140.
6. Che-Yahya N., Abdul-Rahim R., Mohd-Rashid R. Determinants of corporate bond yield: The case of Malaysian Bond Market. *International Journal of Business and Society*. 2016;17(2):245–258.

7. Yanto D., Darmansyah D. Determination yield to maturity bonds, audit quality as moderators. *Jurnal Ecodemica: Jurnal Ekonomi, Manajemen, dan Bisnis*. 2021;5(1):1–14. DOI: 10.31294/jeco.v5i1.8604
8. Dhar S. Determinants of corporate bond's yields in economy. *SSRN Electronic Journal*. 2016. DOI: 10.2139/ssrn.2761308
9. Listiawati L.N., Paramita V.S. Pengaruh tingkat suku bunga, inflasi, Debt to equity ratio, dan ukuran perusahaan terhadap yield obligasi pada perusahaan yang terdaftar di bursa efek Indonesia tahun 2010–2016. *Jurnal Manajemen*. 2018;15(1):33–51. DOI: 10.25170/jm.v15i1.97
10. Simu N. Determinants of Indonesia corporate bond yield. *Business and Economic Horizons*. 2017;13(5):619–629. DOI: 10.15208/beh.2017.42
11. Sintami A.A., Marsoem B.S. Analysis of factors affecting yield to maturity of corporate bonds traded on Indonesia Stock Exchange 2016–2018. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*. 2020;5(7):1443–1451. DOI: 10.38124/IJISRT20JUL733
12. Suryaningprang A., Suteja J. Analysis of interest rate, capital structure and information risk on yield to maturity and its application on company value: A case study of bond companies listed in the Indonesia Stock Exchange (IDX) from 2009 to 2013. In: The 1st Inter-University forum for strengthening academic competency (IFSAC). (Bandung, Oct. 2–3, 2018). Bandung: Research Institute of Universitas Pasundan Press; 2018:2–9.
13. Гитман Л. Дж., Джонк М. Д. Основы инвестирования. Пер. с англ. М.: Дело; 1999. 1008 с.
14. Якимчук А. Ю., Тепленко А. И., Конягина М. Н. Влияние ключевой ставки на темпы инфляции в современной России. *Вестник Академии знаний*. 2020;(2):490–495. DOI: 10.24411/2304–6139–2020–10217
15. Шаламов Г. А., Агеева Н. А. Ключевая ставка Банка России как инструмент регулирования уровня инфляции. *Финансовая экономика*. 2019;(4):451–455.
16. Балкоев И. М. Влияние денежно-кредитной политики ЦБ на ценообразование финансовых активов. *Научный альманах*. 2017;(10–1):33–36. DOI: 10.17117/na.2017.10.01.033
17. Попова Н. В. Рыночные теоремы и их продолжение. *Вестник Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова*. 2013;(7):93–101.
18. Мельников А. В., Попова Н. В., Скорнякова В. С. Математические методы финансового анализа. М.: Анкил; 2006. 440 с.
19. Ajlouni M. M. Properties and limitations of duration as a measure of time structure of bond and interest rate risk. *International Journal of Economic Perspectives*. 2012;6(4):46–56.
20. Hsia C.-C., Weston J. F. Price behavior of deep discount bonds. *Journal of Banking & Finance*. 1981;5(3):357–361. DOI: 10.1016/0378–4266(81)90031–5
21. Ivanovski Z., Stojanovski T. D., Ivanovska N. Interest rate risk of bond prices on Macedonian Stock Exchange — Empirical test of the duration, modified duration and convexity and bonds valuation. *Economic Research*. 2013;26(3):47–62. DOI: 10.1080/1331677X.2013.11517621
22. Livingston M., Zhou L. Exponential duration: A more accurate estimation of interest rate risk. *The Journal of Financial Research*. 2005;28(3):343–361. DOI: 10.1111/j.1475–6803.2005.00128.x
23. Nia N. M., Alouj H. A., Pireivatlou A. S. Interest rate risk of zero-coupon bond prices on National Stock Exchange (NSE) — Empirical test of the duration, modified duration, convexity and immunization risk. *Archives des Sciences*. 2012;65(9):168–187.
24. Shirvani H., Wilbratte B. Duration and bond price volatility: Some further results. *Journal of Economics and Finance Education*. 2005;4(1):1–6. URL: <https://www.economics-finance.org/jefe/fin/Wilbratpaper2.pdf>
25. Hawawini G. A. On the mathematics of Macaulay's duration: A note. INSEAD Research Working Paper. 1981;(82/03). URL: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82–03.pdf
26. Pianca P. Maximum duration of below par bonds: A closed-form formula. *SSRN Electronic Journal*. 2005. DOI: 10.2139/ssrn.738445
27. Попова Н. В. О некоторых свойствах дюрации Маколея. *Вестник Финансового университета*. 2011;(1):42–46.
28. Попова Н. В. Влияние срока до погашения на изменчивость цены облигации. *Вестник Финансового университета*. 2013;(3):72–84.
29. Malkiel B. Expectations, bond prices, and the term structure of interest rates. *Quarterly Journal of Economics*. 1962;76(2):197–218.

REFERENCES

1. Fabozzi F.J. Bond markets, analysis and strategies. Harlow: Pearson Education Ltd.; 2012. 744 p. (Russ. ed.: Fabozzi F.J. Rynok obligatsii: Analiz i strategii. 2nd ed. Moscow: Alpina Business Books; 2007. 950 p.).
2. Rossokhin V.V. Analysis of risk factors in bond yields. Moscow: Internauka; 2019. 112 p. (In Russ.).
3. Buklemishev O.V. Eurobond market. Moscow: Delo; 1999. 232 p. (In Russ.).
4. Fabozzi F.J. Duration estimation for bonds and bond portfolios. In: Fabozzi F.J., ed. Handbook of finance (in 3 vols.). Vol. III. Valuation, financial modeling, and qualitative tools. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2008. URL: <https://doi.org/10.1002/9780470404324.hof003015>
5. Isaev A.K., Dem'yanov V.N. Analysis of factors affecting the yield of corporate bonds. In: Research and design of intelligent systems in automotive, aircraft and mechanical engineering (ISMCA' 2018). (Taganrog, Apr. 19–20, 2018). Proc. All-Russ. sci-pract. conf. with int. particip. Taganrog: ElDirect; 2018:136–140. (In Russ.).
6. Che-Yahya N., Abdul-Rahim R., Mohd-Rashid R. Determinants of corporate bond yield: The case of Malaysian Bond Market. *International Journal of Business and Society*. 2016;17(2):245–258.
7. Yanto D., Darmansyah D. Determination yield to maturity bonds, audit quality as moderators. *Jurnal Ecodemica: Jurnal Ekonomi, Manajemen, dan Bisnis*. 2021;5(1):1–14. DOI: 10.31294/jeco.v5i1.8604
8. Dhar S. Determinants of corporate bond's yields in economy. *SSRN Electronic Journal*. 2016. DOI: 10.2139/ssrn.2761308
9. Listiawati L.N., Paramita V.S. Pengaruh tingkat suku bunga, inflasi, Debt to equity ratio, dan ukuran perusahaan terhadap yield obligasi pada perusahaan yang terdaftar di bursa efek Indonesia tahun 2010–2016. *Jurnal Manajemen*. 2018;15(1):33–51. DOI: 10.25170/jm.v15i1.97
10. Simu N. Determinants of Indonesia corporate bond yield. *Business and Economic Horizons*. 2017;13(5):619–629. DOI: 10.15208/beh.2017.42
11. Sintami A.A., Marsoem B.S. Analysis of factors affecting yield to maturity of corporate bonds traded on Indonesia Stock Exchange 2016–2018. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*. 2020;5(7):1443–1451. DOI: 10.38124/IJISRT20JUL733
12. Suryaningprang A., Suteja J. Analysis of interest rate, capital structure and information risk on yield to maturity and its application on company value: A case study of bond companies listed in the Indonesia Stock Exchange (IDX) from 2009 to 2013. In: The 1st Inter-University forum for strengthening academic competency (IFSAC). (Bandung, Oct. 2–3, 2018). Bandung: Research Institute of Universitas Pasundan Press; 2018:2–9.
13. Gitman L.J., Joehnk M.D. Fundamentals of investing. Reading, MA: Addison-Wesley; 1998. 720 p. (Russ. ed.: Gitman L.J., Joehnk M.D. Osnovy investirovaniya. Moscow: Delo; 1999. 1008 p.).
14. Yakimchuk A. Yu., Teplenko A.I., Konyagina M.N. The impact of key rates on inflation in modern Russia. *Vestnik Akademii znaniy = Bulletin of the Academy of Knowledge*. 2020;(2):490–495. (In Russ.). DOI: 10.24411/2304–6139–2020–10217
15. Shalamov G.A., Ageeva N.A. Key bet of the Bank of Russia as a tool for regulating the inflation level. *Finansovaya ekonomika = Financial Economy*. 2019;(4):451–455. (In Russ.).
16. Balkoev I.M. Influence of monetary policy of the Central Bank on the pricing of financial assets. *Nauchnyi al'manakh = Science Almanac*. 2017;(10–1):33–36. (In Russ.). DOI: 10.17117/na.2017.10.01.033
17. Popova N.V. Market theorems and their continuation. *Vestnik Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta imeni G. V. Plekhanova = Vestnik of the Plekhanov Russian University of Economics*. 2013;(7):93–101. (In Russ.).
18. Mel'nikov A.V., Popova N.V., Skornyakova V.S. Mathematical methods of financial analysis. Moscow: Ankil; 2006. 440 p. (In Russ.).
19. Ajlouni M.M. Properties and limitations of duration as a measure of time structure of bond and interest rate risk. *International Journal of Economic Perspectives*. 2012;6(4):46–56.
20. Hsia C.-C., Weston J.F. Price behavior of deep discount bonds. *Journal of Banking & Finance*. 1981;5(3):357–361. DOI: 10.1016/0378–4266(81)90031–5
21. Ivanovski Z., Stojanovski T.D., Ivanovska N. Interest rate risk of bond prices on Macedonian Stock Exchange — Empirical test of the duration, modified duration and convexity and bonds valuation. *Economic Research*. 2013;26(3):47–62. DOI: 10.1080/1331677X.2013.11517621

22. Livingston M., Zhou L. Exponential duration: A more accurate estimation of interest rate risk. *The Journal of Financial Research*. 2005;28(3):343–361. DOI: 10.1111/j.1475–6803.2005.00128.x
23. Nia N.M., Alouj H.A., Pireivatlou A.S. Interest rate risk of zero-coupon bond prices on National Stock Exchange (NSE) — Empirical test of the duration, modified duration, convexity and immunization risk. *Archives des Sciences*. 2012;65(9):168–187.
24. Shirvani H., Wilbratte B. Duration and bond price volatility: Some further results. *Journal of Economics and Finance Education*. 2005;4(1):1–6. URL: <https://www.economics-finance.org/jefe/fin/Wilbratpaper2.pdf>
25. Hawawini G.A. On the mathematics of Macaulay's duration: A note. INSEAD Research Working Paper. 1981;(82/03). URL: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82-03.pdf
26. Pianca P. Maximum duration of below par bonds: A closed-form formula. *SSRN Electronic Journal*. 2005. DOI: 10.2139/ssrn.738445
27. Popova N.V. Discussing Macaulay duration features. *Vestnik Finansovogo universiteta = Bulletin of the Financial University*. 2011;(1):42–46. (In Russ.).
28. Popova N.V. Maturity impact on bond price volatility. *Vestnik Finansovogo universiteta = Bulletin of the Financial University*. 2013;(3):72–84. (In Russ.).
29. Malkiel B. Expectations, bond prices, and the term structure of interest rates. *Quarterly Journal of Economics*. 1962;76(2):197–218.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / ABOUT THE AUTHOR



Наталья Владимировна Попова — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия
Natal'ya V. Popova — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Mathematics in Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia
<http://orcid.org/0000-0002-3700-5249>
nat_popova_@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest Statement: The author has no conflicts of interest to declare.

Статья поступила в редакцию 18.05.2022; после рецензирования 31.05.2022; принята к публикации 01.06.2022. Автор прочитала и одобрила окончательный вариант рукописи.

The article was submitted on 18.05.2022; revised on 31.05.2022 and accepted for publication on 01.06.2022.

The author read and approved the final version of the manuscript.