УДК 336.767.3:51

ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТЫ КУПОННЫХ ПЛАТЕЖЕЙ НА ПОКАЗАТЕЛЬ ДЮРАЦИИ ОБЛИГАЦИИ

ПОПОВА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА,
кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО «РЭУ им. Г.В. Плеханова», Москва, Россия
E-mail: *nat_popova_@mail.ru*

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается задача о влиянии частоты купонных платежей на показатель дюрации облигации. Число купонных платежей в году — параметр облигации, не относящийся к числу основных. Однако в литературе, в интернет-источниках имеются сообщения о его влиянии на инвестиционные свойства облигации, в том числе и на показатель дюрации. Тем не менее, специальные исследования не проводились. В связи с этим теория инвестирования в финансовые инструменты с фиксированным доходом представляется неполной. Если учесть, что дюрация облигации представляет собой вполне адекватную меру ее процентного риска, то решение этой задачи актуально и с практической точки зрения, поскольку позволяет получить более полное представление о факторах, влияющих на процентный риск облигации.

Задача решается в условиях определенности при фиксированных значениях основных параметров облигации. Основной математический аппарат — разложение (сложных) функций в степенные ряды и действия с рядами, такие как сложение и перемножение рядов. Использованы свойства знакочередующихся рядов и сходящихся числовых последовательностей.

Основной результат данной работы — математическое доказательство зависимости дюрации облигации от частоты купонных платежей. Доказано, что при фиксированных значениях основных параметров облигации с увеличением частоты купонных платежей последовательность значений дюрации является убывающей. Получено значение предела этой последовательности. Доказанные утверждения подтверждаются конкретными вычислениями.

Теоретические результаты — доказанные утверждения о влиянии частоты купонных платежей на показатель дюрации — можно рассматривать как дополнение теории инвестирования в финансовые инструменты с фиксированным доходом. Результаты работы могут быть использованы в задачах портфельного и долгосрочного инвестирования.

***Ключевые слова*:** математические методы; купонная облигация; частота купонных платежей; дюрация облигации.

THE IMPACT OF COUPON PAYMENT FREQUENCY ON BOND DURATION

NATALIYA V. POPOVA,
PhD, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics in Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia
E-mail: *nat_popova_@mail.ru*

ABSTRACT

In this paper we consider the impact of coupon payment frequency on the bond duration. The frequency of coupon payments per year is not among factors that have the key impact on the investment features of bonds. Scientists have already mentioned the impact of this factor on bond duration. However, no special research has been conducted. That is why the theory of investing in financial instruments with fixed income is incomplete. If we take into consideration that bond duration is a rather adequate measure of its interest rate risk, the solution to this

problem is important from a practical point of view as well, as it allows to have a better understanding of factors that impact the interest rate risk of bonds.
The problem is solved under certainty for fixed values of the bond's key parameters. The main mathematical tool is the expansion (of complex) functions in power series and actions with the series, such as addition and multiplication of series. We used the features of alternating series and convergent numerical sequences.
The main result of this work is a mathematical proof that the bond duration depends on the frequency of coupon payments, which can be seen as a part of the theory of financial investments with fixed income. It is proved that for fixed values of the bond's key parameters, when the frequency of coupon payments is increasing, the sequence of duration's values is decreasing, which corresponds to the meaning of duration. We got the value of the limit of this sequence. The assertions were proved and confirmed by concrete calculations.
Theoretical results — proved assertions about the impact of the frequency of coupon payments on duration — can be considered a contribution to the theory of investment in financial instruments with fixed income. The results can be used for the purposes of portfolio and long-term investment.
***Keywords*:** mathematical methods; coupon bond; frequency of coupon payments; duration.

Теория финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности является основой современной теории финансовых инвестиций, что подтверждается в специальном исследовании [1]. Основной объект изучения этой теории — безрисковые ценные бумаги (облигации). В связи с особой ролью таких бумаг на фондовом рынке развитие этой теории представляет и практический интерес. К настоящему времени в данной теории рассмотрены основные инвестиционные свойства облигации. Получены их математические доказательства, например в [2, 3][1]. Однако остаются неизученные вопросы.

Влияние частоты купонных платежей на инвестиционные свойства облигации — один из таких вопросов. Число купонных платежей в году — параметр облигации, не относящийся к числу основных. Однако на практике проявляется его влияние на инвестиционные свойства облигации. Например, авторы интернет-ресурса[2] отмечают: «Увеличение частоты купонных выплат повышает инвестиционную привлекательность выпуска». В работе [4] рассмотрено влияние числа купонных платежей в году на цену облигации. Влияние этого фактора на другие показатели облигации в теории не рассматривалось. В связи с этим теория инвестирования в финансовые инструменты с фиксированным доходом представляется неполной.

В данной работе рассматривается задача о влиянии частоты купонных платежей на показатель дюрации Маколея. Несмотря на ограниченность условий, при которых определен этот показатель, в настоящее время он востребован и в усовершенствованном виде используется в различных исследованиях [5]. Востребованность этого показателя объясняется, очевидно, его свойствами. Известно, что дюрация представляет собой вполне адекватную меру процентного риска облигации. Кроме того, по определению, дюрация Маколея — это средневзвешенный срок выплат по облигации. Таким образом, дюрация — показатель важных для инвестирования характеристик облигации. В связи с этим исследования факторов, влияющих на показатель дюрации облигации, представляют не только теоретический, но и практический интерес. Влияние основных факторов — доходности, купонной ставки и срока до погашения на показатель дюрации рассмотрено в ряде работ, например [2, 6]. В литературе отмечено влияние частоты купонных платежей на показатель дюрации облигации, например в работе [7, с. 475]. При этом характер влияния не указан. Авторы

[1] В работе *Malkiel B.* Expectations, bond prices, and the term structure of interest rates (Quarterly Journal of Economics. 1962. Vol.76. No. 2. P. 197–218) приводятся доказательства рыночных теорем об оценке облигаций.

[2] Размещение рублевых облигационных займов URL: http://www.besteconomics.ru (дата обращения: 17.03.2012).

интернет-ресурса[3] сообщают: «Чем чаще выплачиваются купоны по облигации, тем меньше дюрация, так как больше платежей располагаются к начальному моменту». Однако специальные исследования влияния частоты купонных платежей на показатель дюрации не проводились. Частично это можно объяснить тем, что на практике частота купонных платежей — мало изменяющийся параметр. Согласно [7, с. 425], «как правило, проценты по облигации выплачиваются каждые шесть месяцев. В некоторых случаях интервал выплаты процентов сокращается до одного месяца, и совсем редко выплата осуществляется один раз в год».

В данной работе приводится математическое доказательство зависимости дюрации облигации от числа купонных платежей в году. Задача решается в условиях определенности при фиксированных значениях основных параметров облигации. Основные требования условий определенности: облигация является справедливо оцененной, не имеет кредитного риска и не может быть отозвана эмитентом до установленной даты погашения. Основной математический аппарат — разложение (сложных) функций в степенные ряды и действия с рядами, такие как сложение и перемножение рядов.

Пусть дана облигация номиналом A, купонные выплаты по которой производятся m раз в году по годовой купонной ставке f. Пусть r и $D(m)$ — доходность к погашению и дюрация облигации в момент сразу после купонной выплаты, когда до погашения остается T лет и n купонных платежей. Тогда $T = \dfrac{n}{m}$.

Теорема. При фиксированных T, f и r справедливы следующие утверждения:

1) последовательность $\{D(m)\}$ является убывающей:

2) $$\lim_{m\to\infty} D(m) = \frac{T\left(1-\dfrac{f}{r}\right)+\dfrac{f}{r^2}\left(e^{Tr}-1\right)}{1+\dfrac{f}{r}\left(e^{Tr}-1\right)}.$$

Доказательство. По определению, дюрация облигации при указанных условиях вычисляется по формуле [2, с. 63]:

$$D(m) = \frac{\dfrac{fA}{m^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^i}+\dfrac{n}{m}\frac{A}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^n}}{\dfrac{fA}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^i}+\frac{A}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^n}}, \qquad (1)$$

где A — номинал облигации. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} i\,p^i = \frac{p}{(1-p)^2}-\frac{p^{n+1}}{(1-p)^2}-\frac{n\,p^{n+1}}{1-p}, \quad \sum_{i=1}^{n} p^i = \frac{p-p^{n+1}}{1-p},$$

где $0 < p < 1$, $n = T\,m$, то выражение (1) можно преобразовать к виду:

[3] URL: http://data.cbonds.info/files/cbondscalc/HelpCalculator.pdf (дата обращения: 05.05. 2015).

$$D(m)=\frac{T\left(1-\frac{f}{r}\right)+\frac{f}{r^2}\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\alpha(m)-1\right)}{1+\frac{f}{r}\left(\alpha(m)-1\right)}, \tag{2}$$

где $\alpha(m)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Tm}$. Рассмотрим числовую последовательность $\{D(m)\}$ (номер члена последовательности совпадает с числом купонных платежей в году m).

1) Покажем, что $D(m+1) < D(m)$. Рассмотрим разность

$$D(m+1)-D(m)=\frac{1}{\left(1+\frac{f}{r}\left(\alpha(m)-1\right)\right)\left(1+\frac{f}{r}\left(\alpha(m+1)-1\right)\right)}\frac{f}{r}\sigma,$$

где

$$\sigma=\left(\alpha(m)-1\right)\left(T-T\frac{f}{r}-\frac{1}{r}-\frac{1}{m}\right)-\left(\alpha(m+1)-1\right)\left(T-T\frac{f}{r}-\frac{1}{r}-\frac{1}{m+1}\right)-$$
$$-\frac{f}{r}\left(\alpha(m)-1\right)\left(\alpha(m+1)-1\right)\frac{1}{m(m+1)}. \tag{3}$$

Покажем, что $\sigma < 0$. Чтобы установить знак σ, правую часть выражения (3) будем рассматривать как сумму некоторого числового ряда. Знак σ — знак суммы этого ряда. Получим ряд в правой части выражения (3). Используем разложение в степенной ряд функции:

$$\alpha(x)-1=A_0+A_1\left(\frac{r}{x}\right)+A_2\left(\frac{r}{x}\right)^2+A_3\left(\frac{r}{x}\right)^3+A_4\left(\frac{r}{x}\right)^4+\ldots,$$

$$\text{где}\quad x\ge 1,\ 0<r<1,\ A_0=\left(e^{Tr}-1\right);\ A_1=-e^{Tr}\cdot\frac{Tr}{2};\ A_2=e^{Tr}\left(\frac{Tr}{3}+\frac{(Tr)^2}{8}\right);$$

$$A_3=-e^{Tr}\left(\frac{Tr}{4}+\frac{(Tr)^2}{6}+\frac{(Tr)^3}{48}\right);\ A_4=e^{Tr}\left(\frac{Tr}{5}+\frac{5}{36}(Tr)^2+\frac{(Tr)^3}{24}+\frac{(Tr)^4}{384}\right);\ \ldots\ .$$

Эти разложения получены путем разложения функции $\alpha(x)=\left(1+\frac{r}{x}\right)^{Tx}$ в степенной ряд при $x \ge 1$, где использованы разложения функций вида e^u и $\ln(1+u)$. Так как $e^{Tr}=1+Tr+\frac{(Tr)^2}{2!}+\frac{(Tr)^3}{3!}+\ldots$, то коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — суммы числовых рядов:

$$A_0=Tr+\frac{(Tr)^2}{2!}+\frac{(Tr)^3}{3!}+\ldots,\quad A_1=-\left(\frac{Tr}{2}+\frac{(Tr)^2}{2}+\frac{(Tr)^3}{2\cdot 2!}+\frac{(Tr)^4}{2\cdot 3!}+\frac{(Tr)^5}{2\cdot 4!}+\ldots\right),$$

$$A_2=\left(\frac{Tr}{3}+\frac{11}{24}(Tr)^2+\frac{7}{24}(Tr)^3+\frac{17}{144}(Tr)^4+\frac{5}{144}(Tr)^5+\ldots\right),$$

$$A_3=-\left(\frac{Tr}{4}+\frac{5}{12}(Tr)^2+\frac{15}{48}(Tr)^3+\frac{7}{48}(Tr)^4+\frac{14}{288}(Tr)^5+\ldots\right),$$

$$A_4=\left(\frac{Tr}{5}+\frac{61}{180}(Tr)^2+\frac{101}{360}(Tr)^3+\frac{847}{5760}(Tr)^4+\ldots\right),\ldots . \qquad (4)$$

Тогда при $m \geq 1$ и $0 < r < 1$ имеем:

$$(\alpha(m)-1)=A_0+A_1\left(\frac{r}{m}\right)+A_2\left(\frac{r}{m}\right)^2+A_3\left(\frac{r}{m}\right)^3+A_4\left(\frac{r}{m}\right)^4+\ldots,$$

$$\alpha(m+1)=A_0+A_1\left(\frac{r}{m+1}\right)+A_2\left(\frac{r}{m+1}\right)^2+A_3\left(\frac{r}{m+1}\right)^3+A_4\left(\frac{r}{m+1}\right)^4+\ldots .$$

Эти разложения используем для преобразования выражения (3) в числовой ряд. В частности, для преобразования последнего слагаемого в выражении (3), содержащего произведение $(\alpha(m)–1)(\alpha(m+1)–1)$, использовано правило умножения рядов. В результате выражение (3) преобразуется к виду:

$$\sigma=S_1-\frac{f}{r}S_2, \qquad (5)$$

где S_1 и S_2 — суммы сходящихся числовых рядов. Чтобы установить знаки S_1 и S_2 в этом выражении, воспользуемся следующим утверждением. Пусть $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots$ — ряд Лейбница. Если хотя бы для одного $n \in N$ выполняется неравенство $|c_{2n-1}| > |c_{2n}|$, то знак суммы ряда совпадает со знаком первого члена ряда. Рассмотрим сумму

$$S_1=a_0+a_1r+a_2r^2+a_3r^3+\ldots, \qquad (6)$$

где

$$a_0=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{(m+1)}\right)\left((Tr-1)A_1-A_0\right),\quad a_1=\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\left((Tr-1)A_2-A_1\right),$$

$$a_2=\left(\frac{1}{m^3}-\frac{1}{(m+1)^3}\right)\left((Tr-1)A_3-A_2\right),\quad a_3=\left(\frac{1}{m^4}-\frac{1}{(m+1)^4}\right)\left((Tr-1)A_4-A_3\right),$$

$$a_4=\left(\frac{1}{m^5}-\frac{1}{(m+1)^5}\right)\left((Tr-1)A_5-A_4\right)\quad a_5=\left(\frac{1}{m^6}-\frac{1}{(m+1)^6}\right)\left((Tr-1)A_6-A_5\right),\ldots .$$

Используя разложения (4), получим:

$$\left((Tr-1)A_1-A_0\right)=-\left(\frac{Tr}{2}+\frac{1}{2}(Tr)^2+\frac{5}{12}(Tr)^3+\frac{5}{24}(Tr)^4+\ldots\right),$$

$$\left((Tr-1)A_2-A_1\right)=\left(\frac{Tr}{6}+\frac{9}{24}(Tr)^2+\frac{10}{24}(Tr)^3+\frac{37}{114}(Tr)^4+\ldots\right),$$

$$\left((Tr-1)A_3-A_2\right)=-\left(\frac{1}{12}(Tr)+\frac{7}{24}(Tr)^2+\frac{19}{48}(Tr)^3+\frac{41}{144}(Tr)^4+\frac{38}{288}(Tr)^5+\ldots\right),$$

$$\left((Tr-1)A_4-A_3\right)=\left(\frac{Tr}{20}+\frac{5}{18}(Tr)^2+\frac{267}{720}(Tr)^3+\frac{1609}{5760}(Tr)^4+\ldots\right),\ \ldots . \qquad (7)$$

Из разложений (7) следует, что $a_0 < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$, … — коэффициенты ряда (6) являются суммами отрицательных и положительных числовых рядов. Представление коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, ... в виде рядов позволило установить, что ряд (6) является знакочередующимся. Убедимся, что (6) — ряд Лейбница. Так как это сходящийся числовой ряд, достаточно сравнить модули членов этого ряда. Для этого сравним почленно положительные ряды, суммами которых являются модули членов ряда (6). Сравнение рядов базируется на утверждении, что если члены сходящихся положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ удовлетворяют неравенству $a_n > b_n$, $n = 1,2, ...$, то такому же неравенству подчиняются их частичные суммы $S_n^a > S_n^b$, $n = 1,2,\ldots$. Тогда по теореме о переходе к пределу в неравенствах суммы этих рядов удовлетворяют неравенству $S^a \geq S^b$. Сравнение рядов будем рассматривать при условиях $m \geq 1$ и $r < 0,2$.

Обоснование значений $r < 0,2$ следующее. В задаче рассматривается дюрация облигаций без кредитного риска. Уровень доходности таких бумаг r заведомо ниже 20%. Например, в работе Дж. Кэхилла[4] сообщается: «Анализ доходности казначейских облигаций США почти за 200 лет дает следующие результаты: среднеарифметическая процентная ставка — 4,62%. Средняя доходность в 4,62% представляется разумно близкой к уровню доходности сегодняшнего рынка».

Сравним $|a_0|$ и $a_1 r$ при указанных условиях. Имеем:

$$|a_0| = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left(\frac{Tr}{2} + \frac{1}{2}(Tr)^2 + \frac{5}{12}(Tr)^3 + \frac{5}{24}(Tr)^4 + \ldots\right),$$

$$a_1 r = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)\left(\frac{Tr}{6} + \frac{9}{24}(Tr)^2 + \frac{10}{24}(Tr)^3 + \frac{37}{144}(Tr)^4 + \ldots\right)r.$$

Обозначим через $p_k = \frac{x_k}{x_{k+1}} \cdot \frac{1}{r}$, где $x_k = \frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k}$. Можно показать, что $\frac{x_k}{x_{k+1}} > m\frac{k}{k+1} \geq \frac{1}{2}$ при $m \geq 1$ и $k = 1,2,\ldots$. Тогда $p_k = \frac{x_k}{x_{k+1}} \cdot \frac{1}{r} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} > \frac{5}{2}$ при $m \geq 1$, $\frac{1}{r} > 5$, $k = 1,2\ldots,$. Следовательно, $p_1 = \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{1}{r}\right) > \frac{5}{2}$, $m \geq 1$, и почленное сравнение рядов имеет вид:

$$p_1 \frac{Tr}{2} : \left[\left(\frac{Tr}{6}\right)\right] = 3p_1 > 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} > 1,$$

$$p_1 \frac{(Tr)^2}{2} : \left[\left(\frac{9}{24}(Tr)^2\right)\right] = p_1\left(\frac{4}{3}\right) > \frac{5}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3} > 1,$$

$$p_1 \frac{5}{12}(Tr)^3 : \left[\left(\frac{10}{24}(Tr)^3\right)\right] = p_1 > \frac{5}{2} > 1,$$

$$p_1 \frac{5}{24}(Tr)^4 : \left[\left(\frac{37}{144}(Tr)^4\right)\right] = p_1\left(\frac{30}{37}\right) > \frac{5}{2}\left(\frac{30}{37}\right) = \frac{75}{37} > 1, \ldots .$$

Такому же неравенству подчиняются отношения частичных сумм сравниваемых рядов. По теореме о переходе к пределу в неравенствах $|a_0| \geq a_1 r$. Очевидно, что $|a_0| \neq a_1 r$. Следовательно,

[4] *Кэхилл Дж.А.* Выбор реалистичной дисконтной ставки. URL: http://www.cfin.ru/finanalysis/invest/realistic_disc.shtml (дата обращения: 20.04.2015).

для первых двух членов ряда (6) неравенство является строгим: $|a_0| > a_1 r$. Сравним теперь $a_1 r$ и $|a_2| r^2$. Имеем:

$$a_1 r = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)\left(\frac{Tr}{6} + \frac{9}{24}(Tr)^2 + \frac{10}{24}(Tr)^3 + \frac{37}{144}(Tr)^4 + \ldots\right) r.$$

$$|a_2| r^2 = \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{(m+1)^3}\right)\left(\frac{1}{12}(Tr) + \frac{7}{24}(Tr)^2 + \frac{19}{48}(Tr)^3 + \frac{41}{144}(Tr)^4 + \frac{38}{288}(Tr)^5 + \ldots\right) r^2.$$

Тогда $p_2 = \frac{x_2}{x_3}\left(\frac{1}{r}\right) > \frac{5}{2}$, $m \geq 1$, и почленное сравнение рядов имеет вид:

$$p_2\left(\frac{Tr}{6}\right) : \frac{Tr}{12} = 2p_2 > 2 \cdot \frac{5}{2} = 5 > 1,$$

$$p_2\left(\frac{9}{24}(Tr)^2\right) : \frac{7}{24}(Tr)^2 = p_2\left(\frac{9}{7}\right) > \frac{5}{2}\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{45}{14} > 1,$$

$$p_2\left(\frac{10}{24}(Tr)^3\right) : \frac{19}{48}(Tr)^3 = p_2\left(\frac{20}{19}\right) > \frac{5}{2}\left(\frac{20}{19}\right) = \frac{50}{19} > 1,$$

$$p_2\left(\frac{37}{144}(Tr)^4\right) : \frac{41}{144}(Tr)^4 = p_2\left(\frac{37}{41}\right) > \frac{5}{2}\left(\frac{37}{41}\right) = \frac{185}{82} > 1, \ldots .$$

Такому же неравенству подчиняются отношения частичных сумм рядов. По теореме о переходе к пределу в неравенствах $a_1 r \geq |a_2| r^2$. И так далее. Таким образом, последовательность модулей членов ряда (6) — невозрастающая, сходящаяся к нулю. Оба условия теоремы Лейбница выполняются. Значит, (6) — ряд Лейбница, а S_1 — его сумма. Так как для первых двух членов ряда выполняется неравенство $|a_0| > a_1 r$, знак суммы S_1 совпадает со знаком первого члена ряда $a_0 < 0$. Следовательно, $S_1 < 0$.

Рассмотрим сумму

$$S_2 = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \ldots, \tag{8}$$

где

$$b_0 = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left((Tr) A_1 + A_0^2\right), \quad b_1 = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)\left(A_2 (Tr) + A_0 A_1\right),$$

$$b_2 = \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{(m+1)^3}\right)\left(A_3 (Tr) + A_0 A_2\right) + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left(A_1^2 - A_0 A_2\right),$$

$$b_3 = \left(\frac{1}{m^4} - \frac{1}{(m+1)^4}\right)\left(A_4 (Tr) + A_0 A_3\right) + \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left(A_1 A_2 - A_0 A_3\right),$$

$$b_4 = \left(\frac{1}{m^5} - \frac{1}{(m+1)^5}\right)\left(A_5 (Tr) + A_0 A_4\right) + \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{(m+1)^3}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left(A_1 A_3 - A_0 A_4\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)^2 \left(A_2^2 - A_1 A_3\right),$$

$$b_5 = \left(\frac{1}{m^6} - \frac{1}{(m+1)^6}\right)\left(A_6(Tr) + A_0A_5\right) + \left(\frac{1}{m^4} - \frac{1}{(m+1)^4}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left(A_1A_4 - A_0A_5\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)^2\left(A_2A_3 - A_1A_4\right), \dots .$$

Используя разложения (4), получим:

$$\left((Tr)A_1 + A_0^2\right) = \left(\frac{1}{2}(Tr)^2 + \frac{1}{2}(Tr)^3 + \frac{1}{3}(Tr)^4 + \frac{1}{6}(Tr)^5 + \frac{47}{720}(Tr)^6 \dots\right),$$
$$\left(A_2(Tr) + A_0A_1\right) = -\left(\frac{1}{6}(Tr)^2 + \frac{7}{24}(Tr)^3 + \frac{7}{24}(Tr)^4 + \frac{28}{144}(Tr)^5 + \frac{68}{720}(Tr)^6 + \dots\right),$$
$$\left(A_3(Tr) + A_0A_2\right) = \left(\frac{(Tr)^2}{12} + \frac{5(Tr)^3}{24} + \frac{38(Tr)^4}{144} + \frac{30(Tr)^5}{144} + \dots\right),$$
$$\left(A_1^2 - A_0A_2\right) = -\left(\frac{1}{12}(Tr)^2 + \frac{3}{24}(Tr)^3 + \frac{11}{24}(Tr)^4 + \dots\right), \dots . \qquad (9)$$

Из разложений (9) сразу следует, что $b_0 > 0$, $b_1 < 0$. Для коэффициента b_2 получим:

$$b_2 = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left[\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right)\frac{1}{12}(Tr)^2 + \left(\frac{5}{24}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right) + \frac{2}{24}\frac{1}{m(m+1)}\right)(Tr)^3 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{38}{144}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right) - \frac{28}{144}\frac{1}{m(m+1)}\right)(Tr)^4 + \dots\right].$$

Так как $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \geq \frac{2}{m(m+1)}$, то $b_2 > 0$. И так далее. Тогда $b_0 > 0$, $b_1 < 0$, $b_2 > 0$, $b_3 < 0$, ... — коэффициенты ряда (8) являются суммами положительных и отрицательных числовых рядов. Таким образом, представление коэффициентов b_0, b_1, b_2, b_3, ... в виде рядов позволило установить, что ряд (8) является знакочередующимся. Убедимся, что (8) — ряд Лейбница. Так как это сходящийся числовой ряд, достаточно сравнить модули членов данного ряда. Для этого сравним почленно положительные ряды, суммами которых являются модули членов ряда (8). Сравним b_0 и $|b_1|r$ при условиях $m \geq 1$ и $r < 0{,}2$. Имеем:

$$b_0 = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left((Tr)A_1 + A_0^2\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\left(\frac{1}{2}(Tr)^2 + \frac{1}{2}(Tr)^3 + \frac{1}{3}(Tr)^4 + \frac{1}{6}(Tr)^5 + \frac{47}{720}(Tr)^6 \dots\right),$$
$$|b_1|r = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)\left(A_2(Tr) + A_0A_1\right)r =$$
$$= \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)\left(\frac{1}{6}(Tr)^2 + \frac{7}{24}(Tr)^3 + \frac{7}{24}(Tr)^4 + \frac{28}{144}(Tr)^5 + \frac{68}{720}(Tr)^6 + \dots\right)r.$$

Так как $p_1 > \frac{5}{2}$ при $m \geq 1$, то почленное сравнение рядов имеет вид:

$$p_1 \frac{(Tr)^2}{2} : \left[\left(\frac{1}{6}(Tr)^2\right)\right] = 3p_1 > 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} > 1,$$

$$p_1 \frac{1}{2}(Tr)^3 : \left[\left(\frac{7}{24}(Tr)^3\right)\right] = p_1\left(\frac{12}{7}\right) > \frac{5}{2} \cdot \frac{12}{7} = \frac{30}{7} > 1,$$

$$p_1 \frac{1}{3}(Tr)^4 : \left[\left(\frac{7}{24}(Tr)^4\right)\right] = p_1\left(\frac{8}{7}\right) > \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{7} = \frac{20}{7} > 1,$$

$$p_1 \frac{1}{6}(Tr)^5 : \left[\left(\frac{28}{144}(Tr)^5\right)\right] = p_1\left(\frac{6}{7}\right) > \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{15}{7} > 1,$$

$$p_1 \frac{47}{720}(Tr)^6 : \left[\left(\frac{68}{720}(Tr)^6\right)\right] = p_1\left(\frac{47}{68}\right) > \frac{5}{2} \cdot \frac{47}{68} = \frac{235}{136} > 1, \ldots .$$

Такому же неравенству подчиняются отношения частичных сумм сравниваемых рядов. По теореме о переходе к пределу в неравенствах $b_0 \geq |b_1|r$. Очевидно, что $b_0 \neq |b_1|r$. Следовательно, для первых двух членов ряда (8) неравенство является строгим: $b_0 > |b_1|r$. Сравним теперь $|b_1|r$ и b_2r^2. Имеем:

$$|b_1|r = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)\left(\frac{1}{6}(Tr)^2 + \frac{7}{24}(Tr)^3 + \frac{7}{24}(Tr)^4 + \frac{28}{144}(Tr)^5 + \frac{68}{720}(Tr)^6 + \ldots\right)r,$$

$$b_2r^2 = \left[\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)}\right)\right]\left[\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right)\frac{1}{12}(Tr)^2 + \left(\frac{5}{24}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right) + \frac{2}{24}\frac{1}{m(m+1)}\right)(Tr)^3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{38}{144}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right) - \frac{28}{144}\frac{1}{m(m+1)}\right)(Tr)^4 + \ldots\right]r^2.$$

Здесь удобнее рассмотреть отношения членов ряда с суммой b_2r^2 к членам ряда с суммой $|b_1|r$. Тогда

$$\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right)\frac{1}{12}(Tr)^2 \cdot r : \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)}\right)\frac{1}{6}Tr^2 = \frac{6}{12}\frac{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right)}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)}\right)}r < \frac{1}{2}r < \frac{1}{10} < 1,$$

$$\left(\frac{5}{24}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right) + \frac{2}{24}\frac{1}{m(m+1)}\right)(Tr)^3 \cdot r : \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)}\right)\frac{7}{24}(Tr)^3 =$$

$$= \frac{\frac{5}{7}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right) + \frac{2}{7m(m+1)}}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)}\right)}r = \left(\frac{\frac{5}{7}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\right)}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)}\right)} + \frac{2}{7(2m+1)}\right)r <$$

$$< \left(\frac{5}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3}\right)r = \frac{17}{21}r < \frac{17}{21} \cdot \frac{1}{5} = \frac{17}{105} < 1,$$

$$\left(\frac{38}{144}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}\right)-\frac{28}{144}\frac{1}{m(m+1)}\right)(Tr)^4\cdot r:\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{(m+1)}\right)\frac{7}{24}(Tr)^4=$$

$$=\left(\frac{\frac{38}{42}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}\right)}{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{(m+1)}\right)}-\frac{\frac{28}{42m(m+1)}}{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{(m+1)}\right)}\right)r<\left(\frac{38}{42}-\frac{28}{42(2m+1)}\right)r<\frac{38}{42}r<\frac{38}{42}\cdot\frac{1}{5}=\frac{19}{105}<1, \dots .$$

Такому же неравенству подчиняются отношения частичных сумм рядов. По теореме о переходе к пределу в неравенствах $|b_1|r \geq b_2 r^2$. И так далее. Таким образом, последовательность модулей членов ряда (8) — невозрастающая, сходящаяся к нулю. Оба условия теоремы Лейбница выполняются. Значит, (8) — ряд Лейбница, а S_2 — его сумма. Так как для первых двух членов ряда выполняется неравенство $b_0 > |b_1|r$, то знак суммы S_2 совпадает со знаком первого члена ряда $b_0 > 0$. Следовательно, $S_2 > 0$.

Согласно (5), $\sigma = S_1 - \frac{f}{r} S_2$, где $S_1 < 0$, $S_2 > 0$. Значит, $\sigma < 0$. Утверждение 1 теоремы доказано.

Докажем утверждение 2. Последовательность $\{D(m)\}$ является убывающей и ограниченной снизу ($D(m) > 0$, $m = 1, 2,\dots$). Значит, последовательность $\{D(m)\}$ является сходящейся. Найдем ее предел. Согласно (2),

$$D(m)=\frac{T\left(1-\frac{f}{r}\right)+\frac{f}{r^2}\left(1+\frac{r}{m}\right)(\alpha(m)-1)}{1+\frac{f}{r}(\alpha(m)-1)},$$

где $\alpha(m)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Tm}$. Так как $\lim\limits_{m\to\infty}\alpha(m)=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Tm}=e^{Tr}$, из выражения (2) получаем

$$\lim_{m\to\infty} D(m)=\frac{T\left(1-\frac{f}{r}\right)+\frac{f}{r^2}\left(e^{Tr}-1\right)}{1+\frac{f}{r}\left(e^{Tr}-1\right)}. \tag{10}$$

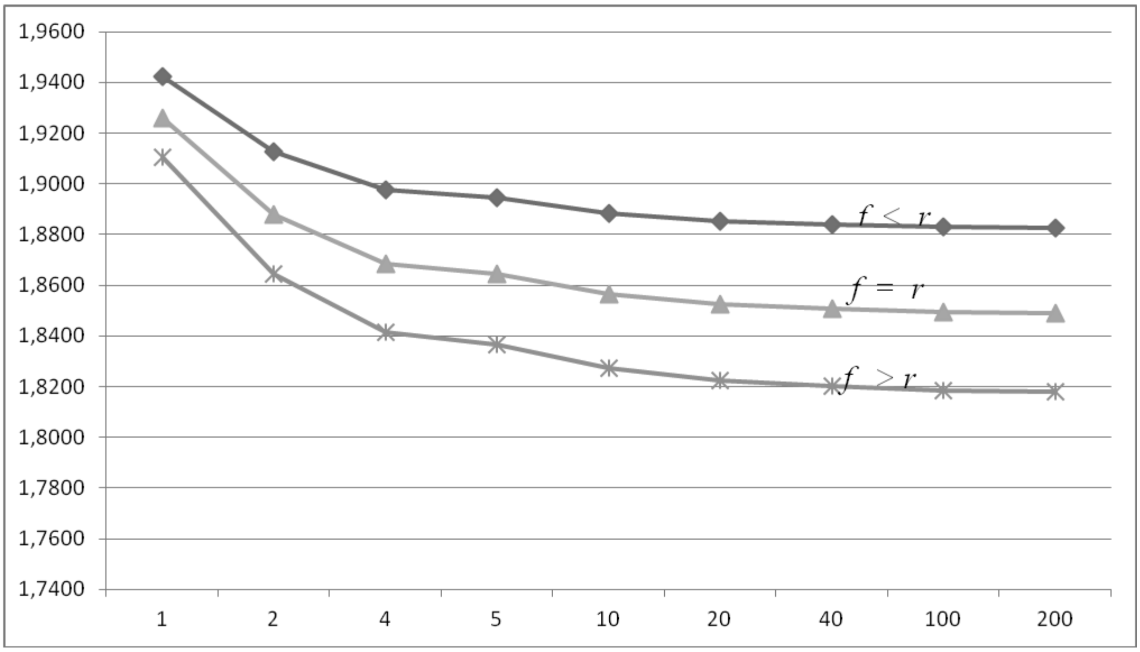
По свойству сходящейся убывающей последовательности $\lim\limits_{m\to\infty} D(m)=\inf\{D(m)\}$. Следовательно, $D(m) \geq \lim\limits_{m\to\infty} D(m)$ для каждого $m = 1,2,\dots$. Теорема доказана.

В *таблице* приведены результаты вычислений членов последовательности $\{D(m)\}$ для купонной облигации при фиксированных T, f и r. Как видим, результаты вычислений подтверждают доказанные утверждения. На *рисунке* показано поведение членов последовательности. С увеличением m члены последовательности приближаются к значению предела $\lim\limits_{m\to\infty} D(m)$, вычисленному по формуле (10) (нижняя строка *таблицы*).

Обсуждение результатов. Основной результат данной работы — математическое доказательство зависимости дюрации облигации от частоты купонных платежей. Доказано, что при фиксированных значениях основных параметров облигации последовательность значений дюрации $\{D(m)\}$ является убывающей, что соответствует смыслу показателя дюрации. Полученное доказательство можно рассматривать как дополнение теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности. Результат может быть полезен и для практического инвестирования, если учесть, что дюрация облигации представляет собой вполне адекватную меру ее процентного риска. Уменьшение «среднего» срока выплат по облигации, а

Зависимость *D* (*m*) при фиксированных *T*, *f* и *r*

	$f < r$	$f = r$	$f > r$
f	6%	8%	10%
r	8%		
T (годы)	2		
m	D (m)	D (m)	D (m)
1	1,9424	1,9259	1,9106
2	1,9126	1,8877	1,8646
4	1,8975	1,8683	1,8412
5	1,8945	1,8644	1,8365
10	1,8884	1,8566	1,8271
20	1,8853	1,8527	1,8224
40	1,8838	1,8507	1,8200
100	1,8828	1,8495	1,8186
200	1,8825	1,8491	1,8181
$m \to \infty$	1,8818	1,8482	1,8170



Графическое изображение зависимости $D(m)$

также процентного риска облигации с увеличением частоты купонных платежей в году — факторы, которые могут способствовать росту привлекательности выпуска с бóльшим значением параметра m, особенно при прогнозе увеличения процентных ставок. Результаты работы могут быть использованы в задачах портфельного и долгосрочного инвестирования, когда рассматриваются возможности инвестировать в облигации одинакового качества, но с различной частотой выплаты купонов.

К результатам работы можно отнести и расширение математического аппарата, применяемого в финансовом анализе в условиях определенности. Такие операции, как разложение сложных функций в степенные ряды, перемножение рядов, ранее не применялись в решении задач теории финансовых инвестиций в условиях определенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Geoffrey Poitras* Frederick R. Macaulay, Frank M. Redington and the Emergence of Modern Fixed Income Analysis. 2006. Citeseer.
2. *Барбаумов В. Е., Гладких И. М., Чуйко А. С.* Финансовые инвестиции с фиксированным доходом (количественный анализ): учеб. пособие. М.: Изд-во РЭА им. Г. В. Плеханова, 2006. 112 с.
3. *Попова Н. В.* Рыночные теоремы и их продолжение // Вестник РЭУ им. Г. В. Плеханова. 2013. № 7 (61). С. 93–101.
4. *Попова Н. В.* Влияние частоты купонных платежей на цену облигации // Вестник финансового университета. 2012. № 3 (69). С. 40–44.
5. *Kopprasch Bob*. Duration: A Practitioner's View // Journal of Applied Finance. 2006. No. 16.2. Pp. 138–143.
6. *Попова Н. В.* О некоторых свойствах дюрации Маколея // Вестник финансового университета. 2011. № 1 (61). С. 42–46.
7. *Гитман Лоренс Дж., Джонк Майкл Д.*. Основы инвестирования. М.: ДЕЛО, 1999. 991 с.

REFERENCES

8. *Geoffrey Poitras* Frederick R. Macaulay, Frank M. Redington and the Emergence of Modern Fixed Income Analysis. 2006. Citeseer.
9. *Barbaumov V. E., Gladkih I. M., Chujko A. S.* Financial investments with the fixed income (the quantitative analysis): manual [Finansovye investicii s fiksirovannym dohodom (kolichestvennyj analiz)]. M.: Izd-vo Ros. jekon. akad., 2006. 112 p.
10. *Popova N. V.* Market theorems and their continuation [Rynochnye teoremy i ih prodolzhenie] // Vestnik RJeU im. G. V. Plehanova. 2013. № 7 (61). P. 93–101.
11. *Popova N. V.* Influence of frequency of coupon payments on the bond price [Vlijanie chastoty kuponnyh platezhej na cenu obligacii] // Vestnik Finansovogo universiteta. 2012. № 3 (69). P. 40–44.
12. *Kopprasch Bob*. Duration: A Practitioner's View // Journal of Applied Finance. 2006. No. 16.2. Pp. 138–143.
13. *Popova N. V*. About some properties of a duration of Macaulay [O nekotoryh svojstvah djuracii Makoleja] // Vestnik Finansovogo universiteta. 2011. № 1 (61). P. 42–46.
14. *Gitman Lawrence J., Joehnk Michael D.* Osnovy investirovanija. M.: DELO, 1999. 991 p.