ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

DOI: 10.26794/2587-5671-2023-27-3-221-238
УДК 336.763(045)
JEL G11, G12, G17, G32

Верхние границы мер финансовых рисков различной степени катастрофичности

В.Б. Минасян
Высшая школа финансов и менеджмента Российской академии народного хозяйства и государственной службы, Москва, Россия

АННОТАЦИЯ
Вопрос оценки величины рисков с помощью определенных мер риска представляет одну из важнейших проблем современных финансов. Однако оценка многих современных мер риска требует определенных, иногда значительных усилий, а при этом на практике инвестору достаточно было бы знание о верхних границах этих мер риска. Сравнив их со своим риск-аппетитом, инвесторы в случае, когда верхние границы мер риска укладывались бы в их риск-аппетит, могли бы оценить данный риск как приемлемый для себя. И лишь в случае, когда верхняя граница соответствующей меры риска превышала бы их риск-аппетит, возникала бы необходимость для них в подробной оценке соответствующей меры риска. **Целью** данной работы является рассмотрение верхних границ сначала для таких известных мер риска, как ценность под риском *VaR* и ожидаемый дефицит или условная ценность под риском *ES*. Далее получаются верхние границы для введенных автором в научный обиход мер риска *VaR* в степени *t*, $VaR^{(t)}$ и *ES* в степени *t*, $ES^{(t)}$. В работе также с применением результатов В. Хюрлиманна получены представления для максимальных значений мер риска $VaR^{(t)}$ и $ES^{(t)}$. **Методом** получения описанных результатов является применение определенных представлений всех этих мер риска, применение неравенств П. Чебышева, а также результатов В. Хюрлиманна. В **результате** исследования для верхних границ предложены описания, выражающие их лишь через несколько первых моментов закона распределения потерь. Автор делает **вывод**, что исследование верхних границ важных мер риска представляет научный интерес и имеет практическую ценность для экспресс-оценки соответствующих рисков.
Ключевые слова: верхние границы мер риска; мера риска *VaR*; мера риска *ES*; меры риска $VaR^{(t)}$; меры риска $ES^{(t)}$; катастрофические меры риска

Для цитирования: **Минасян В.Б. Верхние границы мер финансовых рисков различной степени катастрофичности. *Финансы: теория и практика.* 2023;27(3):221-238. DOI: 10.26794/2587-5671-2023-27-3-221-238**

ORIGINAL PAPER

Upper Limits of Financial Risk Measures of Various Degrees of Catastrophicity

V.B. Minasyan
Higher School of Finance and Management, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

ABSTRACT
The question of assessing the magnitude of risks using certain risk measures presents one of the most important problems of modern finance. However, many modern risk measures require considerable effort at times and, in practice, the investor would have sufficient knowledge of the upper limits of those risks. Comparing them with their risk appetite, an investor, in the case when the upper limits of risk measures would fit into their risk appetite, could assess this risk as acceptable to themselves. Only if the upper limit of the appropriate risk measure exceeded their risk appetite would there be a need for a detailed assessment of the appropriate risk measure. **The aim** of this paper is to consider upper limits first for known risk measures such as value at risk, *VaR*, and expected deficit or notional value at risk of *ES*. Next, upper limits are obtained for the risk measures *VaR* to the degree of t, $VaR^{(t)}$ and ES to the degree of t, $ES^{(t)}$ introduced by the author into scientific use. Also, using the results of V. Hürlimann, representations for maximum values of risk measures $VaR^{(t)}$ and $ES^{(t)}$. The **method** of obtaining the described results is the application of certain representations of all these risk measures, the application of P. Chebyshev's inequalities, as well as the results of V. Hürlimann. As a **result** of the study, descriptions have been proposed for the upper limits, expressing them only after a few first moments of the loss distribution law. The author **concludes** that the study of the upper limits of important risk measures of scientific interest has practical value for the express assessment of relevant risks.
Keywords: upper limits of risk measures; *VaR* risk measure; *ES* risk measure; $VaR^{(t)}$ risk measures; $ES^{(t)}$ risk measures; catastrophic risk measures

For citation: **Minasyan V.B. Upper limits of financial risk measures of various degrees of catastrophicity. *Finance: Theory and Practice.* 2023;27(3):221-238. (In Russ.). DOI: 10.26794/2587-5671-2023-27-3-221-238**

ВВЕДЕНИЕ

Одним из центральных вопросов риск-менеджмента является представление об *экстремуме* некоторых мер риска, оцениваемом по отношению к важнейшим для него рискам. Однако в действительности риск-менеджер иногда действует консервативно, основываясь при принятии решений, на наименее привлекательной оценке риска, которая согласуется с неполной доступной ему информацией. Это может быть сделано путем определения в данных классах рисков, согласующихся с частично известной информацией, какой-либо верхней границы для соответствующей меры на данном классе рисков [1].

В этой статье мы изучаем верхние границы рисков, оцениваемых с помощью определенных мер риска искажения ожидания, когда основной риск не полностью определен и доступна только некоторая информация о его моментах. Эта проблема является релевантной по различным причинам. Во-первых, меры риска искажения ожидания обладают многими важными свойствами, которыми, как правило, как ожидается, должны обладать «хорошие» меры риска [2]. Во-вторых, измерение риска портфелей находится в центре риск-менеджмента. Когда маржинальные функции распределения компонентов портфеля, а также структура зависимости между активами известны, риск портфеля может быть количественно оценен с использованием, например, моделирования Монте-Карло. Однако в большинстве случаев не ожидается, что будет доступна полная информация о структуре зависимости, и различные заинтересованные стороны, такие как инвесторы и регулирующие органы, могут быть заинтересованы в знании наихудшего сценария для портфеля (т.е. сценария, когда мера риска достигает наивысшего значения). В связи с этим отметим, что существует богатая литература по поиску границ для квантилей — также называемой ценности под риском (*VaR*) портфеля, при условии, что все маржинальные функции распределения известны, но зависимости неизвестны [3–8].

В этой статье, однако, мы не фиксируем маржинальные функции распределения, но получаем границы при знании только некоторых моментов потерь портфеля (например, на основе статистики портфеля) без указания маржинальных функций распределения.

Наиболее известными мерами риска искажений ожидания являются ценность под риском *VaR* и условная ценность под риском, также называемая в литературе мерой ожидаемого дефицита *ES* [1]. На самом деле *ES* является наименьшей когерентной мерой риска, которая больше меры риска *VaR*, которая является наиболее часто используемой мерой риска в практике управления рисками и надзора, но не является субаддитивной и, следовательно, когерентной мерой риска [2]. Фактически *VaR* является конкретным квантилем распределения, тогда как *ES* больше сфокусирован на правом конце распределения в том смысле, что он измеряет ожидаемую потерю при условии, что она больше *VaR*. Моментные границы для *VaR* и *ES* были изучены в литературе несколькими авторами, включая Kaas, Goovaerts [9], Denuit и др. [10], De Schepper, Heijnen [11], Hürlimann [12, 13]. В частности, Hürlimann [12] находит аналитические границы для *VaR* и *ES* при знании среднего, дисперсии, ассимметрии и эксцесса.

В этой связи следует заметить, что нельзя ожидать, что существует мера риска (т.е. одно число), которое описывает все характеристики риска и предоставляет полную картину риска портфеля (т.е. случайной величины). Например, исследования Hürlimann [12] *ES* для различных двухпараметрических функций распределения с фиксированным средним значением и дисперсией при изменении вероятности потерь показывают, что *ES* не всегда правильно отражает возрастание риска (хвостового) при переходе от одного распределения к другому. Более того, меры риска используются в различных контекстах: таких как управление рисками (McNeil и др. [14]), ценообразование (Wirch, Hardy [15]), распределение капитала (Dhaene и др. [16]) и регулирование (Danielsson и др. [17]), и мера риска, подходящая для одной цели, может быть неуместной в другом контексте.

В работе В.Б. Минасяна [18] были введены меры риска *VaR* в степени t, а в [19] доказано, что семейство мер *VaR* в степени t является подмножеством множества мер риска искажения ожидания. То есть всякая мера риска *VaR* в степени t $(VaR_p^{(t)})$ при любом $t \geqslant 1$ является мерой риска искажения ожидания с определенной функцией искажения. При этом данная функция была предъявлена. В последней работе также было введено семейство новых мер риска, названных мерами риска «*ES* в степени t» $(ES_p^{(t)})$ при любой доверительной вероятности p и любом действительном $t \geqslant 1$. В работе было исследовано взаимоотношение двух классов мер риска: мер риска искажения ожидания и мер риска

ES в степени *t* и было доказано, что семейство мер *ES* в степени *t* является подмножеством множества мер риска искажения ожидания. То есть что всякая мера риска *ES* в степени *t* при любом $t \geqslant 1$ является мерой риска искажения ожидания с определенной функцией искажения. При этом данная функция была предъявлена.

Как было сказано, не может существовать отдельная мера риска, которая способна охватить все характеристики риска. Такой идеальной меры не существует. Семейства мер риска *VaR* в степени *t* и *ES* в степени *t*, как указано в работах [18, 19], позволяют исследовать правый хвост распределения потерь с любой необходимой для данного случая точностью, т.е. исследовать хвост распределения настолько тщательно, насколько это необходимо в данных конкретных обстоятельствах. Вообще в процессе исследования разумно искать меры риска, которые идеально подходят для конкретной частной проблемы. Так как все предлагаемые меры риска имеют недостатки и ограничены в применении, выбор соответствующей меры риска продолжает оставаться очень обсуждаемой темой в управлении рисками.

Мы в данной работе приводим верхние оценки для мер риска *VaR* и *ES*, а также мер риска $VaR_p^{(t)}$ и $ES_p^{(t)}$. Кроме того, с использованием результатов Hürlimann [12] получаются значения для максимальных значений мер риска $VaR_p^{(t)}$ и $ES_p^{(t)}$ в условиях незнания закона распределения потерь и использования лишь нескольких первых моментов закона распределения потерь. Кроме того, обобщая рассуждения Hürlimann [12], автор в работе представил оценки экономического капитала при хеджировании потерь выше их минимально возможного верхнего уровня с применением мер риска $ES_p^{(t)}$.

ОЦЕНКА СВЕРХУ МЕР РИСКА *VAR* И *ES* С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРВЫХ ДВУХ МОМЕНТОВ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕРЬ

Начнем с определения верхней границы для обычной меры риска *VaR*.

С этой целью приведу неравенство из работы [1] (см. упражнение 2.7.7).

Утверждение 1. (Основное неравенство для *VaR* через момент первого порядка). Пусть $X > 0$ — случайная величина, представляющая величину возможных потерь. Тогда неравенство

$VaR_p[X] \leq \dfrac{E[X]}{1-p}$ справедливо для любого *p*.

В работе [18] было введено семейство мер «*VaR* в степени *t*», где *t* — любое действительное число $t \geq 1$, обозначаемых как $VaR_p^{(t)}[X]$.

Любое действительное число $t \geq 1$ можно однозначно представить в виде:

$t = k + \alpha$, где *k* — натуральное число, а α — действительное число, причем $0 \leq \alpha < 1$. Очевидно, что *k* является целой частью числа *t*, а α — его дробной частью.

Тогда для мер риска из данного семейства в [18] была доказана справедливость следующей формулы, выражающей их через обычные меры риска *VaR*.

Для меры риска *VaR* в любой действительной степени $t \geq 1$, $VaR_p^{(t)}[X]$ справедлива следующая формула:

$$VaR_p^{(t)}[X] = VaR_{1-(1-p)^k(1-\alpha p)}[X]. \qquad (1)$$

Таким образом, чтобы рассчитать меру риска $VaR_p^{(n)}$, надо просто сосчитать меру риска *VaR* с доверительной вероятностью $1-(1-p)^k(1-\alpha p)$.

Тогда, учитывая формулу (1) и утверждение 1, получаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. (Основное неравенство для $VaR_p^{(t)}$ через момент первого порядка). Пусть $X > 0$ — случайная величина, представляющая величину возможных потерь. Тогда неравенство

$$VaR_p^{(t)}[X] \leq \frac{E[X]}{(1-p)^k(1-\alpha p)}$$

справедливо для любого *p*.

Займемся определением верхней границы для меры риска *ES*.

В работе [1] (см. упражнение 2.7.15) утверждается, что для любой случайной величины потерь *X* со средним μ и дисперсией σ^2 следующее неравенство $ES_p[X] \leq \mu + \sigma\sqrt{p(1-p)}$ справедливо при любом *p*.

Однако легко понять, что для случайной величины *X* с произвольным распределением вероятностей такое неравенство не может быть верным, так как по смыслу меры риска $ES_p[X]$ при приближении доверительной вероятности *p* к 1 значение данной меры должно неограниченно приближаться к верхней границе носителя распределения потерь. В частности, для вероятностных распределений потерь с бесконечным носителем (например, для нормального распределения) при приближении доверительной вероятности *p* к 1 значение данной меры должно неограниченно приближаться к $+\infty$. Однако в приведенном неравенстве верхняя граница для $ES_p[X]$ при приближении доверительной вероятности p к 1 стремится к конечной величине μ, чего в случае произвольного распределения не может быть.

Исходя из этого кажется интересным, получение какого-либо правильного неравенства сверху для $ES_p[X]$, справедливого при любом p.

Докажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. (Основное неравенство для *ES* через моменты первого и второго порядка).

Пусть X — случайная величина, представляющая величину возможных потерь со средним значением μ и дисперсией σ^2. Тогда неравенство

$$ES_p[X] \le \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{1-p}}$$

справедливо для любого p.

Доказательство. Как известно (см. [1]), мера риска $ES_p[X]$ выражается через соответствующие значения мер риска *VaR* следующим образом:

$$ES_p[X] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR_q[X]dq.$$

Согласно определению *VaR* мы имеем:

$$\Pr[X \le VaR_q[X]] = q \text{, что эквивалентно}$$

$$\Pr[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{VaR_q[X]-\mu}{\sigma}] = q.$$

Тогда, если обозначить значение соответствующей нормализованной случайной величины через

$$X^{(0,1)} = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{, получаем}$$

$$\Pr[X^{(0,1)} \le \frac{VaR_q[X]-\mu}{\sigma}] = q, \tag{2}$$

где $E[X^{(0,1)}]=0$ и $\sigma[X^{(0,1)}]=1$.

Из равенства (2) следует, что величина $k_q^{(0,1)} = \dfrac{VaR_q[X]-\mu}{\sigma}$ является квантилем стандартизированной случайной величины $X^{(0,1)}$ с доверительной вероятностью q. Из последнего соотношения следует следующее представление для *VaR*:

$$VaR_q[X] = \mu + k_q^{(0,1)}\sigma. \tag{3}$$

Используя (3), получаем следующее представление для $ES_p[X]$:

$$ES_p[X] = \mu + \frac{\sigma}{1-p}\int_p^1 k_q^{(0,1)}dq. \tag{4}$$

Теперь попытаемся получить оценку для квантиля $k_q^{(0,1)}$. Воспользуемся вторым неравенством Чебышева [20], которое гласит, что для любой случайной величины X, $\Pr[|X-\mu|>\varepsilon] \le \dfrac{\sigma^2[X]}{\varepsilon^2}$ справедливо для любого положительного ε.

Применяя данное неравенство к нормализованной случайной величине $X^{(0,1)}$ и выбирая $\varepsilon = k_q^{(0,1)}$, получаем: $\Pr[|X^{(0,1)}| > k_q^{(0,1)}] \le \dfrac{1}{(k_q^{(0,1)})^2}$, откуда следует, что

$$1-q \le \Pr[X^{(0,1)} > k_q^{(0,1)}] + \Pr[X^{(0,1)} < -k_q^{(0,1)}] = \Pr[|X^{(0,1)}| > k_q^{(0,1)}] \le \frac{1}{(k_q^{(0,1)})^2}.$$

Из последнего неравенства следует оценка для квантиля:

$$|k_q^{(0,1)}| \le \frac{1}{\sqrt{1-q}}. \tag{5}$$

Используя неравенство (6), получаем:

$$\int_p^1 k_q^{(0,1)} dq \le \int_p^1 \frac{dq}{\sqrt{1-q}} = -2\sqrt{1-q}\,|_p^1 = 2\sqrt{1-p},$$

откуда с использованием (4) получаем: $ES_p[X] \le \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{1-p}}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что правая часть данного неравенства при приближении доверительной вероятности *p* к 1 неограниченно приближается к $+\infty$, не противореча тому, что и значения мер риска $ES_p[X]$ для распределений с бесконечным носителем при приближении доверительной вероятности *p* к 1 неограниченно приближается к $+\infty$.

В работе [19] было введено семейство мер «*ES* в степени *t*», где *t* — любое действительное число $t \ge 1$, обозначаемых как $ES_p^{(t)}[X]$.

Любое действительное число $t \ge 1$ можно однозначно представить в виде: $t = k + \alpha$, где *k* — натуральное число, а α — действительное число, причем $0 \le \alpha < 1$. Очевидно, что *k* является целой частью числа *t*, а α является его дробной частью.

Тогда для мер риска из данного семейства в [19] была доказана справедливость следующего представления, выражающего их через обычные меры риска *ES*.

Для меры риска *ES* в любой действительной степени $t \ge 1$, $ES_p^{(t)}[X]$ справедлива следующая формула:

$$ES_p^{(t)}[X] = ES_{1-(1-p)^k(1-\alpha p)}[X]. \tag{6}$$

Таким образом, чтобы рассчитать меру риска $ES_p^{(t)}$, надо просто сосчитать меру риска *ES* с доверительной вероятностью $1-(1-p)^k(1-\alpha p)$.

Тогда, учитывая формулу (6) и утверждение 3, получаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. (Основное неравенство для $ES_p^{(t)}$ через моменты первого и второго порядка).

Пусть *X* — случайная величина, представляющая величину возможных потерь. Тогда неравенство

$ES_p^{(t)}[X] \le \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{(1-p)^k(1-\alpha p)}}$ справедливо для любого *p*.

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕР РИСКА *VAR* И *ES*, А ТАКЖЕ $VaR^{(t)}$ И $ES^{(t)}$ В СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННОГО НОСИТЕЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В работе В. Хюрлимана [12] приведен следующий результат о максимальных значениях мер рисков *VaR* и *ES* для случайных величин, представляющих соответствующие риски с распределениями вероятностей с ограниченными носителями и фиксированными значениями ожидаемых значений и стандартных отклонений.

Введем в рассмотрение соответствующее множество случайных величин.

Предположим, что носитель соответствующих распределений совпадает с отрезком [*A, B*], а через $D_2 = D_2([A,B]; \mu,\sigma)$ обозначим множество всех случайных величин *X* с носителями в [*A, B*] (*suppX* = [*A, B*]), с ожидаемым значением $E[X] = \mu$ и дисперсией $D[X] = \sigma^2$.

В работе [12] доказана следующая теорема (она здесь приведена с использованием обозначений, принятых в нашей работе).

Теорема 1 (Hurlimann W.). Максимальное значение мер риска *VaR* и *ES* на множестве $D_2 = D_2([A,B];\mu,\sigma)$ определяется следующим образом:

Случай 1: если $p \geq \dfrac{(B-\mu)^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}$, то $\max\limits_{X\in D_2}\{VaR_p[X]\} = \max\limits_{X\in D_2}\{ES_p[X]\} = B$.

Случай 2: если $\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+(\mu-A)^2} \leq p \leq \dfrac{(B-\mu)^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}$, то $\max\limits_{X\in D_2}\{VaR_p[X]\} = \max\limits_{X\in D_2}\{ES_p[X]\} = \mu + \sqrt{\dfrac{p}{1-p}}\sigma$.

Случай 3: если $p \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+(\mu-A)^2}$, то $\max\limits_{X\in D_2}\{VaR_p[X]\} = \mu + \dfrac{(\mu-A)(B-A)p-\sigma^2}{(B-A)(1-p)-(\mu-A)} \leq$

$\leq \max\limits_{X\in D_2}\{ES_p[X]\} = \mu + (\mu-A)(\dfrac{p}{1-p})$.

Сравнивая данное утверждение с оценками сверху мер риска *VaR* и *ES*, приведенных в утверждении 1 и 3, стоит заметить, что оценки сверху мер этих рисков в теореме 1, будучи максимальными на множестве случайных величин (рисков) $D_2 = D_2([A,B];\mu,\sigma)$, являются более точными, и оценки в утверждении 1 и 3 могут быть завышенными в определенных случаях. Однако плюсом оценок в утверждении 1 и 3 является то, что они верны и для любых случайных величин (рисков) с не обязательно ограниченным носителем соответствующих распределений вероятностей.

Перейдем с описания максимальных значений соответствующих мер риска $VaR^{(t)}$ и $ES^{(t)}$ при любом действительном значении $t \geq 1$ [18, 19].

Теорема 2. Максимальное значение мер риска $VaR^{(t)}$ и $ES^{(t)}$ на множестве случайных величин $D_2 = D_2([A,B];\mu,\sigma)$ определяется следующим образом: представим действительное число *t* в виде $t = m+\alpha$, где *m* — натуральное число, а α — действительное число в пределах $0 < \alpha \leq 1$.

Случай 1: если $p \geq p_0$, где p_0 — единственное решение уравнения $(1-p)^m(1-\alpha p) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}$, то

$\max\limits_{X\in D_2}\{VaR_p^{(t)}[X]\} = \max\limits_{X\in D_2}\{ES_p^{(t)}[X]\} = B$.

Случай 2: если $p_1 \leq p \leq p_0$, где p_1 — единственное решение уравнения

$(1-p)^m(1-\alpha p) = \dfrac{(\mu-A)^2}{\sigma^2+(\mu-A)^2}$, то

$\max\limits_{X\in D_2}\{VaR_p^{(t)}[X]\} = \max\limits_{X\in D_2}\{ES_p^{(t)}[X]\} = \mu + \sqrt{\dfrac{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}{(1-p)^m(1-\alpha p)}}\sigma$.

Случай 3: если $p \leq p_1$, то $\max\limits_{X\in D_2}\{VaR_p^{(t)}[X]\} = \mu + \dfrac{(\mu-A)(B-A)(1-(1-p)^m(1-\alpha p))-\sigma^2}{(B-A)(1-p)^m(1-\alpha p)-(\mu-A)} \leq$

$\leq \max\limits_{X\in D_2}\{ES_p^{(t)}[X]\} = \mu + (\mu-A)\dfrac{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}{(1-p)^m(1-\alpha p)}$.

Доказательство. Учитывая формулы, связывающие меры рисков $VaR^{(t)}$ и $ES^{(t)}$ с обычными мерами риска *VaR* и *ES*, $VaR_p^{(t)}[X] = VaR_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}[X]$ и $ES_p^{(t)}[X] = ES_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}[X]$, мы понимаем, что для получения утверждений теоремы 2 достаточно в теореме 1 везде величину *p* заменить на $1-(1-p)^m(1-\alpha p)$.

Тогда случай 1 реализуется при значениях доверительной вероятности, удовлетворяющих условию

$1-(1-p)^m(1-\alpha p) \geq \dfrac{(B-\mu)^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}$, которое эквивалентно условию

$$(1-p)^m(1-\alpha p) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}, \tag{7}$$

где, очевидно, $\frac{\sigma^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2} \le 1.$

Для исследования множества решений последнего неравенства рассмотрим функцию: $f(p)=(1-p)^m(1-\alpha p)$.

Тогда $f'(p) = -m(1-p)^{m-1}(1-\alpha p) - \alpha(1-p)^m = -(1-p)^{m-1}[m(1-\alpha p)+\alpha(1-p)) =$

$$= (1-p)^{m-1}[\alpha p(1+m)-m-\alpha] = (1-p)^{m-1}\alpha(m+1)[p-\frac{m+\alpha}{\alpha(m+1)}]. \tag{8}$$

Однако легко проверить, что всегда выполняется неравенство $p \le \frac{m+\alpha}{\alpha(m+1)}$, так как справедливо неравенство $\frac{m+\alpha}{\alpha(m+1)} \ge 1$, которое эквивалентно очевидным образом справедливому неравенству $m(1-\alpha) \ge 0$.

Тогда из (8) следует, что $f'(p) \le 0$, и значит, функция $f(p)=(1-p)^m(1-\alpha p)$ является невозрастающей, причем $f(0)=1 \ge \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}$.

Отсюда следует, что уравнение $(1-p)^m(1-\alpha p) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}$ имеет единственное решение p_0 ($0 \le p_0 \le 1$), причем при $p \ge p_0$ выполняется неравенство (7).

Теорема в случае 1 доказана.

Случай 2 реализуется при значениях доверительной вероятности, удовлетворяющих условиям $\frac{\sigma^2}{\sigma^2+(\mu-A)^2} \le 1-(1-p)^m(1-\alpha p) \le \frac{(B-\mu)^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}$, которые эквивалентны условиям

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2} \le (1-p)^m(1-\alpha p) \le \frac{(\mu-A)^2}{\sigma^2+(\mu-A)^2}. \tag{9}$$

Аналогично случаю 1 доказывается существование единственного значения p_1 ($0 \le p_1 \le p_0 \le 1$), решения уравнения $(1-p)^m(1-\alpha p) = \frac{(\mu-A)^2}{\sigma^2+(\mu-A)^2}$, причем при $p_1 \le p \le p_0$ выполняются неравенства (9).

Теорема в случае 2 доказана.

А случай 3 реализуется при значениях доверительной вероятности, удовлетворяющих условию $1-(1-p)^m(1-\alpha p) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(\mu-A)^2}$, которое эквивалентно условию

$$(1-p)^m(1-\alpha p) \ge \frac{(\mu-A)^2}{\sigma^2+(\mu-A)^2}. \tag{10}$$

Тогда из предыдущих рассуждений следует, что при $p \le p_1$ выполняется неравенство (10).

Теорема в случае 3 также доказана.

Сравнивая данное утверждение с оценками сверху мер риска $VaR^{(t)}$ и $ES^{(t)}$, приведенных в утверждениях 2 и 4, стоит заметить, что оценки сверху мер этих рисков в теореме 2 будучи максимальными на множестве случайных величин (рисков) $D_2 = D_2([A,B];\mu,\sigma)$, являются более точными, и оценки в утверждениях 2 и 4 могут быть завышенными в определенных случаях. Однако плюсом оценок в утверждениях 3 и 4 является то, что они верны и для любых случайных величин (рисков) с не обязательно ограниченным носителем соответствующих распределений вероятностей.

ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО КАПИТАЛА ПРИ ХЕДЖИРОВАНИИ ПОТЕРЬ ВЫШЕ ИХ МИНИМАЛЬНО ВОЗМОЖНОГО ВЕРХНЕГО УРОВНЯ

Для начала приведем некоторое свойство, справедливое для случайных величин, принадлежащих множеству $D_2 = D_2([A,B];\ \mu,\sigma)$. (Заметим, что данное свойство для случая $\mu=0$ и $\sigma=1$ приведено и используется в работе В. Хюрлиманна [12].

Свойство. Для любой случайной величины, принадлежащей множеству $D_2 = D_2([A,B];\ \mu,\sigma)$, справедливы следующие соотношения между параметрами, описывающими данное множество:

a) $A \le \mu \le B$;
b) $\sigma^2 \le (B-\mu)(\mu-A)$.

Доказательство. Первое неравенство следует из взятия ожидания в следующих случайных неравенствах, которые справедливы с вероятностью 1 для всех $X \in D_2([A,B];\ \mu,\sigma)$: $A \le X \le B$.

Для доказательства неравенства *b*) перейдем к взятию математического ожидания в следующем неравенстве, которое справедливо с вероятностью 1 для всех $X \in D_2([A,B];\ \mu,\sigma)$: $(B-X)(X-A) \ge 0$.

Тогда получается:

$$B\mu - E(X^2) - AB + A\mu \ge 0, \text{ или}$$

$$E(X^2) - \mu^2 \le A\mu + \mu B - AB - \mu^2, \text{ т.е.}$$

$$\sigma^2 \le (B-\mu)(\mu-A).$$

Рассмотрим теперь компанию, подвергающуюся рискам потерь, представляемым случайными величинами, принадлежащими множеству $D_2 = D_2([0,B];\ \mu,\sigma)$ и попытаемся оценить минимальный уровень потерь *B*.

Из пункта *b*) доказанного свойства следует, что $\sigma^2 \le \mu(B-\mu)$, откуда следует, что

$$B \ge \mu + \frac{\sigma^2}{\mu} = \mu\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right).$$

Введя в рассмотрение величину $k = \dfrac{\sigma}{\mu}$ — коэффициента вариации, мы получаем следующее ограничение для величины *B* максимально возможного убытка: $B \ge \mu(1+k^2)$.

Таким образом, максимально возможный убыток данной компании не может быть меньше величины $\mu(1+k^2)$.

В этих обстоятельствах представляется естественным захеджировать компанию от убытков, превышающих эту величину, с помощью производных инструментов или покупки соответствующей страховки.

Кроме того, предположим для начала, что рисковый капитал рассчитывается с применением меры риска ES_p, и пусть, например, принимается равным $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_p[X]\}$. (С точки зрения практики было бы естественнее рассчитывать его в виде определенного процента от $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_p[X]\}$, но мы для простоты остановимся на этом предположении).

Напомним, что в данных предположениях из теоремы 1 следует, что:

$$\max_{X\in D_2}\{ES_p[X]\} = \begin{cases} B,\ p \ge \dfrac{(B-\mu)^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}, \\ \mu + \sqrt{\dfrac{p}{1-p}}\sigma,\ \dfrac{k^2}{1+k^2} \le p < \dfrac{(B-\mu)^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2}, \\ \left(1+\dfrac{p}{1-p}\right)\mu,\ p < \dfrac{k^2}{1+k^2}, \end{cases}$$

Однако при

$B = \mu(1+k^2)$ мы имеем:

Таблица 1 / Table 1

Расчет рискового капитала $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0.95}[X]\}$ при различных значениях параметров σ, k / Calculation of Risk Capital $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0.95}[X]\}$ at Different Values of Parameters σ, k

№	σ, k	$\frac{k^2}{1+k^2}$	Условие	$\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0.95}[X]\}$
1	$\sigma = 2\,ед., \quad k = 0{,}2$	0,039	$p \geq \frac{k^2}{1+k^2}$	$B = 10{,}4$
2	$\sigma = 5\,ед., \quad k = 0{,}5$	0,2	$p \geq \frac{k^2}{1+k^2}$	$B = 12{,}5$
3	$\sigma = 10\,ед., \quad k = 1$	0,5	$p \geq \frac{k^2}{1+k^2}$	$B = 20$
4	$\sigma = 20\,ед., \quad k = 2$	0,8	$p \geq \frac{k^2}{1+k^2}$	$B = 50$
5	$\sigma = 50\,ед., \quad k = 5$	0,96	$p < \frac{k^2}{1+k^2}$	$(1+\frac{p}{1-p})\mu = 190 < B = 260$

Источник / Source: разработано и составлено автором / Designed and compiled by the author.

$$\frac{(B-\mu)^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2} = \frac{(\mu(1+k^2)-\mu)^2}{\sigma^2+(\mu(1+k^2)-\mu)^2} = \frac{\mu^2 k^4}{\sigma^2+\mu^2 k^4} = \frac{\sigma^2 k^2}{\sigma^2+\sigma^2 k^2} = \frac{k^2}{1+k^2}.$$

Поэтому получаем следующее компактное выражение для рискового капитала:

$$\max_{X\in D_2}\{ES_p[X]\} = \begin{cases} (1+k^2)\mu, \; p \geq \dfrac{k^2}{1+k^2}, \\ (1+\dfrac{p}{1-p})\mu, \; p < \dfrac{k^2}{1+k^2}. \end{cases} \tag{11}$$

Приведенная схема рассуждения принадлежит В. Хюрлиманну [12].

Для понимания степени осторожности при применении описанной оценки рискового капитала рассмотрим численный пример.

Предположим, что доверительная вероятность p, с которой оценивается мера риска ES_p, в данной компании принята $p = 0{,}95$. Кроме того, выберем значение параметра $\mu = 10\,ед.$ и, изменяя значение параметра модели σ (a, значит и k), будем выяснять, какое из условий в равенстве (11) будет выполняться — и соответствующим образом рассчитывать значение рискового капитала. Результаты расчетов приведены в *табл. 1*.

Мы видим, что при относительно небольших коэффициентах вариации k (первые четыре случая), что приводит к относительно небольшой нехеджированной части возможных убытков $B = \mu(1+k^2)$, в данной модели рисковый капитал оценивается по максимуму, равным $B = \mu(1+k^2)$. Однако в случае больших коэффициентов вариации (пятый случай) модель определяет величину необходимого рискового капитала в виде величины 190 ед., меньшей незахеджированной части возможных убытков, которая равна 260 ед., т.е. значительно больше.

Ясно, что это изменение поведения определения величины экономического капитала в данной модели в зависимости от значения коэффициента вариации происходит, начиная от некоторого его значения, между 2 и 5. Определим это критическое значение коэффициента вариации. Ясно, что изменение поведения начинается с выполнения неравенства $p < \frac{k^2}{1+k^2}$, что эквивалентно неравенству $k > \sqrt{\frac{p}{1-p}} = \sqrt{\frac{0,95}{1-0,95}} \approx 4,36.$

Значит, при больших коэффициентах вариации, начиная с критического значения 4,36, модель определяет величину необходимого рискового капитала в виде величины меньшей незахеджированной части возможных убытков.

Продолжаем рассматривать нашу компанию, которая захеджировалась от убытков, превышающих величину $\mu(1+k^2)$, с помощью производных инструментов или покупки соответствующей страховки.

Кроме того, предположим теперь, что рисковый капитал рассчитывается с применением меры риска $ES_p^{(n)}$, где n — натуральное число ($n > 1$), и пусть, например, принимается равным $\max\limits_{X \in D_2}\{ES_p^{(n)}[X]\}$.

Напомним, что в данных предположениях из теоремы 2 следует, что:

$$\max_{X \in D_2}\{ES_p^{(n)}[X]\} = \begin{cases} B, p \ge 1 - \sqrt[n]{\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + (B-\mu)^2}}, \\ \mu + \sqrt{\dfrac{1-(1-p)^n}{(1-p)^n}}\sigma, 1 - \sqrt[n]{\dfrac{1}{1+k^2}} \le p < 1 - \sqrt[n]{\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + (B-\mu)^2}}, \\ (1 + \dfrac{1-(1-p)^n}{(1-p)^n})\mu, p < 1 - \sqrt[n]{\dfrac{1}{1+k^2}}. \end{cases}$$

Однако при

$B = \mu(1+k^2)$ мы получаем:

$$1 - \sqrt[n]{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (B-\mu)^2}} = 1 - \sqrt[n]{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (\mu(1+k^2)-\mu)^2}} = 1 - \sqrt[n]{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \mu^2 k^4}} =$$
$$= 1 - \sqrt[n]{\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma^2 k^2}} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{1+k^2}}.$$

Поэтому получаем следующее компактное выражение для рискового капитала:

$$\max_{X \in D_2}\{ES_p^{(n)}[X]\} = \begin{cases} (1+k^2)\mu, p \ge 1 - \sqrt[n]{\dfrac{1}{1+k^2}}, \\ (1 + \dfrac{(1-(1-p)^n}{(1-p)^n})\mu, p < 1 - \sqrt[n]{\dfrac{1}{1+k^2}}. \end{cases} \tag{12}$$

Для понимания степени осторожности с применением описанной оценки рискового капитала рассмотрим численный пример.

Предположим, что для оценки экономического капитала с помощью данной модели выбрана мера риска $ES_p^{(n)}$ при $n = 2$, т.е. $ES_p^{(2)}$.

Предположим опять, что доверительная вероятность p, с которой оценивается мера риска $ES_p^{(2)}$, в данной компании принята $p = 0,95$. Кроме того, выберем значение параметра $\mu = 10$ *ед.* и , изменяя значение параметра модели σ (а значит, и k), будем выяснять, какое из условий в равенстве (12) будет выполняться, и соответствующим образом рассчитывать значение рискового капитала. Результаты расчетов приведены в *табл. 2*.

Таблица 2 / Table 2

Расчет рискового капитала $\max_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(2)}[X]\}$ при различных значениях параметров σ, k / Calculation of Risk Capital $\max_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(2)}[X]\}$ at Different Values of Parameters σ, k

№	σ, k	$1-\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$	Условие	$\max_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(2)}[X]\}$
1	$\sigma = 2\,ед.,\quad k = 0,2$	0,194	$p \ge 1-\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$	$B = 10,4$
2	$\sigma = 5\,ед.,\quad k = 0,5$	0,1055	$p \ge 1-\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$	$B = 12,5$
3	$\sigma = 10\,ед.,\quad k = 1$	0,29	$p \ge 1-\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$	$B = 20$
4	$\sigma = 20\,ед.,\quad k = 2$	0,553	$p \ge 1-\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$	$B = 50$
5	$\sigma = 50\,ед.,\quad k = 5$	0,804	$p \ge 1-\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$	$B = 260$

Источник / Source: разработано и составлено автором / Designed and compiled by the author.

Мы видим, что при всех тех же значениях коэффициентов вариации k в данной модели с применением меры риска $ES_{0,95}^{(2)}$ вместо $ES_{0.95}$ рисковый капитал оценивается по максимуму, равным $B = \mu(1+k^2)$. То есть мера риска $ES_{0,95}^{(2)}$ проявляет большую осторожность по сравнению с $ES_{0,95}$.

Ясно, что в этой модели будет происходить изменение поведения определения величины экономического капитала в зависимости от значения коэффициента вариации, начиная от некоторого его значения. Определим это критическое значение коэффициента вариации. Ясно, что изменение поведения начинается с выполнения неравенства $p < 1-\sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$, что эквивалентно неравенству

$$k > \sqrt{\frac{1-(1-p)^2}{(1-p)^2}} = \sqrt{\frac{1-(1-0,95)^2}{(1-0,95)^2}} \approx 19,98.$$

При всех таких значениях k значение рискового капитала определяется равным $\max_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(2)}[X]\} = (1-\frac{1-(1-0,95)^2}{(1-0,95)^2})10 = 4000$ ед., тогда как незахеджированная часть возможных убытков даже при k = 20 равна $B = \mu(1+k^2) = 4010$.

Значит, при больших коэффициентах вариации, начиная с критического значения 19,98, модель определяет величину необходимого рискового капитала в виде величины меньшей незахеджированной части возможных убытков. То есть начиная со столь значительных коэффициентов вариации, и эта модель перестает быть максимально осторожной. Далее, если применять модель оценки рискового капитала на основе меры риска $ES_{0,.95}^{(3)}$, оказывается, что соответствующее критическое значение коэффициента вариации оказывается еще выше — примерно 89,44 и т.д.

Продолжим рассматривать нашу компанию, которая захеджировалась от убытков, превышающих величину $\mu(1+k^2)$, с помощью производных инструментов или покупки соответствующей страховки.

Кроме того, предположим теперь, что рисковый капитал рассчитывается с применением мер риска $ES_p^{(t)}$, где t — действительное число ($t > 1$), и пусть, например, принимается равным $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_p^{(t)}[X]\}$.

Представим число t в виде $t = m+\alpha$, где m — натуральное число, а α действительное число $0<\alpha\le 1$. Напомним, что в данных предположениях из теоремы 3 следует, что

$$\max_{X\in D_2}\{ES_p^{(t)}[X]\} = \begin{cases} B, p \ge p_0, \\ \mu + \sqrt{\dfrac{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}{(1-p)^m(1-\alpha p)}}\sigma, p_1 \le p < p_0, \\ (1+\dfrac{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}{(1-p)^m(1-\alpha p)})\mu, p<p_1. \end{cases}$$

Напомним, что p_0 — это единственное решение уравнения

$$(1-p)^m(1-\alpha p) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2},$$

а p_1 — это единственное решение уравнения

$$(1-p)^m(1-\alpha p) = \frac{\mu^2}{\sigma^2+\mu^2}.$$

Однако при $B=\mu(1+k^2)$ мы получаем:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2+(B-\mu)^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(\mu(1+k^2)-\mu)^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\mu^2k^4} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma^2k^2} = \frac{1}{1+k^2} = \frac{\mu^2}{\sigma^2+\mu^2},$$

т.е. $p_0 = p_1$.

Поэтому получаем следующее компактное выражение для рискового капитала:

$$\max_{X\in D_2}\{ES_p^{(t)}[X]\} = \begin{cases} (1+k^2)\mu, p \ge p_0, \\ (1+\dfrac{(1-(1-p)^m(1-\alpha p)}{(1-p)^m(1-\alpha p)})\mu, p<p_0. \end{cases} \quad (13)$$

Для понимания степени осторожности с применением описанной оценки рискового капитала рассмотрим численный пример.

Предположим, что для оценки экономического капитала с помощью данной модели выбрана мера риска $ES_p^{(t)}$ при $t = 1,5$, т.е. $ES_p^{(1,5)}$.

Предположим опять, что доверительная вероятность p, с которой оценивается мера риска $ES_p^{(1,5)}$, в данной компании принята $p = 0,95$. Кроме того, выберем значение параметра $\mu = 10$ *ед.* и, изменяя значение параметра модели σ (а значит, и k), будем выяснять, какое из условий в равенстве (13) будет выполняться, и соответствующим образом рассчитывать значение рискового капитала.

Таблица 3 / Table 3

Расчет рискового капитала $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(1,5)}[X]\}$ при различных значениях параметров σ, k / Calculation of Risk Capital $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(1,5)}[X]\}$ at Different Values of Parameters σ, k

№	σ, k	$\frac{1}{1+k^2}$	Условие	$\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(1,5)}[X]\}$
1	$\sigma = 2\,ед., \quad k = 0,2$	0,96	$0,02625 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 10,4$
2	$\sigma = 5\,ед., \quad k = 0,5$	0,8	$0,02625 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 12,5$
3	$\sigma = 10\,ед., \quad k = 1$	0,5	$0,02625 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 20$
4	$\sigma = 20\,ед., \quad k = 2$	0,2	$0,02625 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 50$
5	$\sigma = 50\,ед., \quad k = 5$	0,039	$0,02625 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 260$

Источник / Source: разработано и составлено автором / Designed and compiled by the author.

Таблица 4 / Table 4

Расчет рискового капитала $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(1,2)}[X]\}$ при различных значениях параметров σ, k / Calculation of Risk Capital $\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0,,95}^{(1,2)}[X]\}$ at Different Values of Parameters σ, k

№	σ, k	$\frac{1}{1+k^2}$	Условие	$\max\limits_{X\in D_2}\{ES_{0,95}^{(1,2)}[X]\}$
1	$\sigma = 2\,ед., \quad k = 0,2$	0,96	$0,0405 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 10,4$
2	$\sigma = 5\,ед., \quad k = 0,5$	0,8	$0,0405 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 12,5$
3	$\sigma = 10\,ед., \quad k = 1$	0,5	$0,0405 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 20$
4	$\sigma = 20\,ед., \quad k = 2$	0,2	$0,0405 < \frac{1}{1+k^2}$	$B = 50$
5	$\sigma = 50\,ед., \quad k = 5$	0,039	$0,0405 > \frac{1}{1+k^2}$	$(1+\frac{1-(1-0,95)(1-0,2\cdot 0,95)}{(1-0,95)(1-0,2\cdot 0,95)})\cdot 10 = = 246,9$

Источник / Source: разработано и составлено автором / Designed and compiled by the author.

Заметим, что выбор в формуле (13) выражения для расчета рискового капитала зависит от того, больше или меньше величина $(1-p)^m(1-\alpha p)$ по сравнению с величиной $\frac{1}{1+k^2}$. Однако в рассматриваемом случае m = 1 и $\alpha = 0,5$, а значит, $(1-p)^m(1-\alpha p) = 0,02625$.

Результаты расчетов приведены в *табл. 3*.

Мы видим, что при всех тех же значениях коэффициентов вариации *k* в данной модели с применением меры риска $ES_{0,95}^{(1,5)}$ рисковый капитал оценивается по максимуму, равным $B=\mu(1+k^2)$. То есть мера риска $ES_{0,.95}^{(1,.5)}$ так же, как и $ES_{0.95}^{(2)}$, проявляет большую осторожность по сравнению с $ES_{0,95}$.

А теперь предположим, что для оценки экономического капитала с помощью данной модели выбрана мера риска $ES_p^{(t)}$ при t = 1,2, т.е. $ES_p^{(1,2)}$.

Предположим опять, что доверительная вероятность *p*, с которой оценивается мера риска $ES_p^{(1,2)}$, в данной компании принята *p* = 0,95. Кроме того, выберем значение параметра $\mu = 10\textit{ед.}$, и изменяя значение параметра модели σ (а значит, и *k*), будем выяснять какое из условий в равенстве (13) будет выполняться и соответствующим образом рассчитывать значение рискового капитала.

Заметим, что выбор в формуле (13) выражения для расчета рискового капитала зависит от того больше или меньше величина $(1-p)^m(1-\alpha p)$ по сравнению с величиной $\frac{1}{1+k^2}$. Однако в рассматриваемом случае m = 1 и $\alpha = 0,2$, а значит, $(1-p)^m(1-\alpha p) = 0,0405$.

Результаты расчетов приведены в *табл. 4*.

Мы видим, что при относительно небольших коэффициентах вариации *k* (первые четыре случая), что приводит к относительно небольшой нехеджированной части возможных убытков $B=\mu(1+k^2)$, в данной модели рисковый капитал оценивается по максимуму, равным $B=\mu(1+k^2)$. Однако в случае больших коэффициентов вариации (5-й случай) модель определяет величину необходимого рискового капитала в виде величины 246,9 ед., меньшей незахеджированной части возможных убытков, которая равна 260 ед., т.е. значительно больше.

Ясно, что это изменение поведения определения величины экономического капитала в данной модели в зависимости от значения коэффициента вариации происходит, начиная от некоторого его значения между 2 и 5. И модели оценки рискового капитала с применением мер риска $ES_p^{(t)}$ при $t \ge 1,5$ намного осторожнее, чем соответствующие модели при $t \le 1,2$ и по модельному параметру *t*, также существует некоторое критическое значение $0,2 < t_0 < 1,5$, при котором происходит переход от одной политики (менее осторожной) выбора рискового капитала к другой (более осторожной).

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕР РИСКА *VAR* И *ES*, А ТАКЖЕ $VaR^{(t)}$ И $ES^{(t)}$ В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО НОСИТЕЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В работе В. Хюрлимана [12] приведен следующий результат о максимальных значениях мер рисков *VaR* и *ES* для случайных величин, представляющих соответствующие риски с распределениями вероятностей с *неограниченными* носителями и фиксированными значениями ожидаемых значений и стандартных отклонений, коэффициентов асимметрии и эксцесса.

То есть он сосредотачивается на множестве $D_4((-\infty,\infty)\,;\mu,\sigma,\gamma,\gamma_2)$ всех случайных величин со значениями на $(-\infty,\infty)$ с известными средним μ, дисперсией σ^2, асимметрией γ и эксцессом γ_2. На всех этапах будут использоваться следующие вспомогательные параметры:

$$\Delta = 2+\gamma_2-\gamma^2,\quad c=\frac{1}{2}(\gamma-\sqrt{4+\gamma^2}),\ \overline{c}=-c^{-1}=\frac{1}{2}(\gamma+\sqrt{4+\gamma^2}). \tag{14}$$

В работе [12] доказана следующая теорема (она здесь приведена с использованием обозначений, принятых в нашей работе).

Теорема 3. Максимальное значение *VaR* для множества D_4 равно

$$\max_{X\in D_4}\{VaR_p[X]\} = \mu + x_p\sigma,$$

где x_p — квантиль стандартизированного максимального распределения $F_{ST,\max}^{(4)}(x)$ получается из следующих уравнений:

Случай 1: $p \ge 1-P(\overline{c}) = \frac{1}{2}(1+\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}}),\ p(x_p)=1-p$.

Случай 2: $p<1-P(\bar{c})=\frac{1}{2}(1+\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}}),\ p(\psi(x_p))=p,$

где функции $\psi(x)$ и $p(x)$ определены в следующими выражениями:

$$\psi(u)=\frac{1}{2}(\frac{A(u)-\sqrt{A(u)^2+4q(u)B(u)}}{q(u)}), \tag{15}$$

$$A(u)=\gamma q(u)+\Delta u,\ B(u)=\Delta+q(u),\ q(u)=1+\gamma u-u^2, \tag{16}$$

$$P(u)=\frac{\Delta}{q(u)^2+\Delta(1+u^2)}. \tag{17}$$

Сравнивая данное утверждение с оценкой сверху меры риска *VaR*, приведенной в утверждении 1, стоит заметить, что оценка сверху этой меры рисков в теореме, будучи максимальной на множестве случайных величин (рисков) $D_4((-\infty,\infty)\,;\mu,\sigma,\gamma,\gamma_2)$, является более точной, и оценка в утверждении 1 может быть завышенной в определенных случаях. Однако плюсом оценки в утверждении 1 является то, что она верна для любых случайных величин (рисков) с фиксированным ожидаемым значением, но при этом произвольными значениями стандартного отклонения, коэффициентов асимметрии и эксцесса, тогда как оценка в теореме 4 справедлива при фиксированных значениях также и стандартного отклонения, коэффициентов асимметрии и эксцесса. Кроме того, алгоритм получения максимальной верхней оценки в теореме 4 требует применения численных методов, так как нет прямой формулы для ее вычисления, тогда как оценка согласно утверждению 1 предельно проста.

Перейдем к описанию максимальных значений соответствующих мер риска $VaR^{(t)}$ при любом действительном значении $t\geq 1$ (см. [18, 19]).

Теорема 4. Максимальное значение $VaR^{(t)}$ на множестве случайных величин D_4 определяется следующим образом: представим действительное число *t* в виде $t=m+\alpha$, где m — натуральное число, а α — действительное число в пределах $0<\alpha\leq 1$.

Тогда $\max\limits_{X\in D_4}\{VaR_p^{(t)}[X]\}=\mu+x_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}\sigma$, где x_p — квантиль стандартизированного максимального распределения $F^{(4)}_{ST,\max}(x)$ получается следующим образом:

пусть p_0 является единственным решением уравнения $(1-p)^m(1-\alpha p)=\frac{1}{2}(1-\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}})$, тогда:

Случай 1: если $p\geq p_0$, то $P(x_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)})=(1-p)^m(1-\alpha p)$,

Случай 2: если $p<p_0$, то $P(\psi(x_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}))=1-(1-p)^m(1-\alpha p)$.

Доказательство. Учитывая формулу, связывающую меры рисков $VaR^{(t)}$ с обычной мерой риска *VaR*: $VaR_p^{(t)}[X]=VaR_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}[X]$, мы понимаем, что для получения утверждений теоремы 2 достаточно в теореме 1 везде величину *p* заменить на $1-(1-p)^m(1-\alpha p)$.

Тогда случай 1 реализуется при значениях доверительной вероятности, удовлетворяющих условию

$1-(1-p)^m(1-\alpha p)\geq\frac{1}{2}(1+\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}})$, которое эквивалентно условию $(1-p)^m(1-\alpha p)\leq\frac{1}{2}(1-\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}})$, (18)

где очевидно $\frac{1}{2}(1-\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}})\leq 1$.

Тогда так же, как при доказательстве теоремы 3, доказывается существование и единственность решения p_0 уравнения $(1-p)^m(1-\alpha p)=\frac{1}{2}(1-\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}})$, причем при $p \geq p_0$ выполняется неравенство (18), а при $p < p_0$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (18). Отсюда и из теоремы 3 следует доказательство теоремы 4.

В работе [12] доказана следующая теорема (она здесь приведена с использованием обозначений, принятых в нашей работе).

Теорема 5. Максимальное значение *ES* на множестве D_4 равно

$$\max_{X \in D_4}\{ES_p[X]\} = \mu + \{d(y_p) + \frac{1}{1-p}(\pi_{\max}^{(4)} \circ d)(y_p)\}\sigma,$$

где квантиль максимального распределения $F_{SL,\max}^{(4)}(x)$ стандартизованного стоп-лосс порядка (см. [29]) получается из следующих уравнений:

Случай 1: если $p \geq 1-P(\overline{c})$, то $P(y_p)=1-p$,

Случай 2: если $p < 1-P(\overline{c})$, то $P(y_p)=p$,

где $P(x)$ определяется из (18),

$$d(x)=\frac{1}{2}\frac{\{\phi(x,\psi(x))-x\}\{x+\psi(x)\}+2x\{\psi(x)-x\}}{\{\phi(x,\psi(x))-x\}+\{\psi(x)-x\}},$$

$$\phi(u,v)=\frac{\gamma-u-v}{1+uv},$$

$$\pi_{\max}^{(4)}(d(x))=\begin{cases} P(x)(d(x)-x)-d(x), x<\overline{c} \\ P(x)(x-d(x)), x \geq \overline{c} \end{cases}$$

Перейдем с описания максимальных значений соответствующих мер риска $ES^{(t)}$ при любом действительном значении $t \geq 1$ (см. [18, 19]).

Теорема 6. Максимальное значение $ES^{(t)}$ на множестве случайных величин D_4 определяется следующим образом: представим действительное число t в виде $t=m+\alpha$, где m — натуральное число, а α — действительное число в пределах $0<\alpha \leq 1$.

$$\max_{X \in D_4}\{ES_p^{(t)}[X]\} = \mu + \{d(y_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}) + \frac{1}{(1-p)^m(1-\alpha p)}(\pi_{\max}^{(4)} \circ d)(y_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)})\}\sigma,$$

где $d(y_p)$ — квантиль максимального распределения $F_{SL,\max}^{(4)}(x)$ стандартизованного стоп-лосс порядка (см. [12]) получается из следующих уравнений.

Пусть p_0 — единственное решение уравнения $(1-p)^m(1-\alpha p)=P(\overline{c})$.

Тогда:

Случай 1: если $p \geq p_0$, то $P(y_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)})=(1-p)^m(1-\alpha p)$,

Случай 2: если $p < p_0$, то $P(y_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)})=1-(1-p)^m(1-\alpha p)$.

Доказательство. Учитывая формулу, связывающую меры рисков $ES^{(t)}$ с обычной мерой риска *ES*, $ES_p^{(t)}[X]=ES_{1-(1-p)^m(1-\alpha p)}[X]$, мы понимаем, что для получения утверждений теоремы 2 достаточно в теореме 1 везде величину *p* заменить на $1-(1-p)^m(1-\alpha p)$.

Тогда случай 1 реализуется при значениях доверительной вероятности, удовлетворяющих условию $1-(1-p)^m(1-\alpha p)\geq 1-P(\overline{c})$, которое эквивалентно условию $(1-p)^m(1-\alpha p)\leq P(\overline{c})$. (19)

Тогда так же, как при доказательстве теоремы 3, доказывается существование и единственность решения p_0 уравнения $(1-p)^m(1-\alpha p)=P(\overline{c})$, причем при $p\geq p_0$ выполняется неравенство (19), а при $p<p_0$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (19). Отсюда и из теоремы 7 следует доказательство теоремы 8.

ВЫВОДЫ

Исследование верхних границ различных мер рисков, включающих меры катастрофических рисков, представляют и научный, и практический интерес. Для практики они удобны для экспресс-оценок рисков, которые достаточно просто реализуются, если верхние границы имеют простые и явные выражения. Особенно важны случаи, когда они выражены лишь через несколько первых моментов закона распределения потерь и не требуют знания самого закона распределения.

В работе сначала изучаются верхние границы для таких известных мер риска, как ценность под риском *VaR*, и ожидаемый дефицит или условная ценность под риском *ES*. Далее получаются верхние границы для введенных автором в научный обиход мер катастрофических рисков *VaR* в степени *t*, $VaR^{(t)}$ и *ES* в степени *t*, $ES^{(t)}$.

В работе также описываются результаты В. Хюрлиманна по оценке максимальных значений мер риска *VaR* и *ES*, и с применением этих результатов получены представления для максимальных значений мер риска $VaR^{(t)}$ и $ES^{(t)}$.

С применением подхода В. Хюрлиманна в работе приведена оценка величины экономического капитала с помощью мер риска $ES^{(t)}$ в зависимости от коэффициента вариации потерь при хеджировании потерь выше их минимально возможного верхнего уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd; 2005. 440 p. DOI: 10.1002/0470016450
2. Artzner P., Delbaen F, Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 1999;9(3):203-228. DOI: 10.1111/1467-9965.00068
3. Denuit M., De Vylder E., Lefèvre C. Extremal generators and extremal distributions for the continuous s-convex stochastic orderings. *Insurance: Mathematics and Economics*. 1999;24(3):201-217. DOI: 10.1016/S0167-6687(98)00053-5
4. Wang R., Peng L., Yang J. Bounds for the sum of dependent risks and worst Valueat-Risk with monotone marginal densities. *Finance and Stochastics*. 2013;17(2):395-417. DOI: 10.1007/s00780-012-0200-5
5. Embrechts P., Puccetti G., Rüschendorf L. Model uncertainty and VaR aggregation. *Journal of Banking & Finance*. 2013;37(8):2750-2764. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2013.03.014
6. Embrechts P., Wang B., Wang R. Aggregation-robustness and model uncertainty of regulatory risk measures. *Finance and Stochastics*. 2015;19(4):763-790. DOI: 10.1007/s00780-015-0273-z
7. Puccetti G., Rüschendorf L., Small D., Vanduffel S. Reduction of Value-at-Risk bounds via independence and VaRiance information. *Scandinavian Actuarial Journal*. 2017;(3):245-266. DOI: 10.1080/03461238.2015.1119717
8. Rüschendorf L., Witting J. VaR bounds in models with partial dependence information on subgroups. *Dependence Modeling*. 2017;5(1):59-74. DOI: 10.1515/demo-2017-0004
9. Kaas R., Goovaerts M.J. Best bounds for positive distributions with fixed moments. *Insurance: Mathematics and Economics*. 1986;5(1):87-92. DOI: 10.1016/0167-6687(86)90013-2
10. Denuit M., Genest C., Marceau É. Stochastic bounds on sums of dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics*. 1999;25(1):85-104. DOI: 10.1016/S0167-6687(99)00027-X
11. De Schepper A., Heijnen B. How to estimate the Value at Risk under incomplete information. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010;233(9):2213-2226. DOI: 10.1016/j.cam.2009.10.007
12. Hürlimann W. Analytical bounds for two value-at-risk functionals. *ASTIN Bulletin*. 2002;32(2):235-265. DOI: 10.2143/AST.32.2.1028
13. Hürlimann W. Extremal moment methods and stochastic orders. *Boletin de la Associacion Matematica Venezolana*. 2008;15(2):153-301. URL: https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol15/HurlimannXV-2.pdf

14. McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools. Princeton, NJ: Princeton University Press; 2015. 720 p.
15. Wirch J.L., Hardy M.R. A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance: Mathematics and Economics*. 1999;25(3):337-347. DOI: 10.1016/S0167-6687(99)00036-0
16. Dhaene J., Tsanakas A., Valdez E.A., Vanduffel S. Optimal capital allocation principles. *The Journal of Risk and Insurance*. 2012;79(1):1-28. 1 DOI: 0.1111/j.1539-6975.2011.01408.x
17. Danielsson J., Embrechts P., Goodhart C., Keating C., Muennich F., Renault O., Shin H.S. An academic response to Basel II. LSE Financial Markets Group Special Paper. 2001;(130). URL: https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/Responsev3.pdf
18. Минасян В.Б. Новые способы измерения катастрофических рисков: меры «VaR в степени t» и их вычисление. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(3):92-109. DOI: 10.26794/2587–5671–2020–24–3–92–109
Minasyan V.B. New ways to measure catastrophic financial risks: "VaR to the power of t" measures and how to calculate them. *Finance: Theory and Practice*. 2020;24(3):92-109. DOI: 10.26794/2587–5671–2020–24–3–92–109
19. Минасян В.Б. Меры «VaR в степени t» и «ES в степени t» и меры риска искажения. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(6):92-107. DOI: 10.26794/2587–5671–2020–24–6–92–107
Minasyan V.B. New risk measures "VaR to the power of t" and "ES to the power of t" and distortion risk measures. *Finance: Theory and Practice*. 2020;24(6):92-107. DOI: 10.26794/2587–5671–2020– 24–6–92–107
20. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.; 1989. 640 с.
Shiryaev A.N. Probability. Moscow: Nauka; 1989. 640 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / ABOUT THE AUTHOR

Виген Бабкенович Минасян — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой корпоративных финансов, инвестиционного проектирования и оценки им. М.А. Лимитовского, Высшая школа финансов и менеджмента Российской академии народного хозяйства и государственной службы, Москва, Россия
Vigen B. Minasyan — Cand. Sci. (Phis.-Math.), Assoc. Prof., Head of Limitovskii corporate finance, investment design and evaluation department, Higher School of Finance and Management, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia
https://orcid.org/0000-0001-6393-145X
minasyanvb@ranepa.ru, minasyanvb@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 16.05.2022; после рецензирования 22.05.2022; принята к публикации 22.12.2023.
Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

The article was submitted on 16.05.2022; revised on 22.05.2022 and accepted for publication on 22.12.2022.
The author read and approved the final version of the manuscript.