ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-1-133-144
УДК 378:50(045)
JEL E44, F31, G17

Оценка волатильности основных криптовалют, евро и прямого обменного курса рубля

В.А. Бывшев, Н.А. Ященко
Финансовый университет, Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Развитие финансовых технологий в современных условиях способствовало активному использованию при проведении международных расчетов цифровых финансовых инструментов — криптовалюты. Наличие актуальной информации о волатильности цифровой валюты поможет участникам крипторынка прогнозировать последствия проводимых операций. **Целью** данной работы является построение новой меры волатильности финансовых активов, в частности, криптовалют, евро и прямого обменного курса рубля. Для получения такой меры был проведен анализ известных мер волатильности, сформулированы требования к мере волатильности финансового актива и, в итоге, выполнена оценка волатильности основных криптовалют, евро и прямого обменного курса рубля по уровням временных рядов ежемесячных котировок упомянутых активов на временном промежутке с 01.01.2022 по 01.04.2023 г. Научную новизну в работе представляет обоснованная новая мера абсолютной волатильности. Основные **выводы** проведенного исследования: 1) построенная в данной работе мера абсолютной волатильности имеет размерность стоимости актива и измеряет ту часть стоимости актива, которая генерирована неопределенностью в значениях его доходности; 2) самой волатильной криптовалютой является Bitcoin Cash, наименьшую же волатильностью среди криптовалют имеет Bitcoin; 3) волатильность прямого обменного курса рубля (цены американского доллара в рублях) примерно в два раза меньше волатильности Bitcoin; 4) вне конкуренции по волатильности является котировка евро (цена евро в долларах) — 10% за полтора года.

Ключевые слова: актив; доходность актива; криптовалюта; меры волатильности

Для цитирования: **Бывшев В.А., Ященко Н.А. Оценка волатильности основных криптовалют, евро и прямого обменного курса рубля. *Финансы: теория и практика.* 2024;28(1):133-144. DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-1-133-144**

ORIGINAL PAPER

Assessment of the Volatility of the Main Cryptocurrencies, the Euro and the Direct Exchange Rate of the Ruble

V.A. Byvshev, N.A. Yashchenko
Financial University, Moscow, Russia

ABSTRACT

The development of financial technologies in modern conditions has contributed to the active use of digital financial instruments — cryptocurrencies — in international settlements. The availability of up-to-date information on digital currency volatility will help crypto market participants predict the consequences of their transactions. The **purpose** of this work is to construct a new measure of the volatility of financial assets, in particular, cryptocurrencies, the euro and the direct exchange rate of the ruble. In order to obtain this measure, an analysis of known volatility measures was carried out, requirements for the measure of volatility of a financial asset were formulated, and, as a result, the volatility of the main cryptocurrencies, the euro and the direct exchange rate of the ruble, was assessed by the levels of the time series of monthly quotations of these assets in the time interval from 1.01.2022 to 1.04.2023. The scientific novelty in the paper is a reasonable new measure of absolute volatility. The main **conclusions** of the study are: 1) the measure of absolute volatility constructed in this paper has the dimension of the asset value and measures the part of the asset value that is generated by uncertainty in the values of its profitability; 2) Bitcoin Cash is the most volatile cryptocurrency, Bitcoin has the least volatility among cryptocurrencies; 3) the volatility of the direct exchange rate of the ruble (the price of the US dollar in rubles) is about half the volatility of Bitcoin; 4) out of competition in terms of volatility is the euro quote (the euro price in dollars) — 10% in a year and a half.

Keywords: asset; asset yield; cryptocurrency; measures of volatility

For citation: **Byvshev V.A., Yashchenko N.A. Assessment of the volatility of the main cryptocurrencies, the euro and the direct exchange rate of the ruble. *Finance: Theory and Practice.* 2024;28(1):133-144. (In Russ.). DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-1-133-144**

ВВЕДЕНИЕ

В 2009 г. появился качественно новый вид валюты — цифровая валюта, иначе называемая «криптовалютой», которая не имеет физического воплощения и не контролируется ни одним государством или центральным банком. Криптовалюты обладают рядом особенностей, которые в некоторых ситуациях делают их использование для международных расчетов более привлекательным, чем традиционные методы. Следует подчеркнуть, что использование криптовалюты представляет определенный интерес и для отечественной финансово-экономической системы, так как в настоящее время граждане и компании Российской Федерации из-за беспрецедентного количества западных санкций испытывают определенные трудности, связанные с совершением внешнеторговых расчетов, что заставляет переходить от традиционных механизмов оплаты к расчетам при помощи криптовалют. Справедливость сказанного косвенно подтверждает появление в России третьей формы национальной валюты — цифрового рубля, которая с 1 апреля 2023 г. тестируется Банком России. Правда, цифровой рубль и криптовалюты — принципиально разные активы. У криптовалют нет единого эмитента и не существует единого центра, который нес бы обязательства по ней.

Специалисты Банка России отмечают несколько серьезных недостатков использования криптовалют в системе международных расчетов, и один из главных недостатков — высокая волатильность курсов криптовалют[1]. Другими словами, на заданных отрезках времени цена криптовалюты может сильно колебаться, что создает риски для инвесторов и усложняет использование криптовалют для международных расчетов.

Многие исследователи, анализируя в прошлые периоды времени динамику котировок основных криптовалют, приходили к выводу о наличии пузырей и констатировали высокую волатильность цен на рынках криптовалюты [1–8]. Волатильность основных криптовалют во второе десятилетие XXI в. исследовалась, в частности, в работах [9] и [10]. А какова волатильность основных криптовалют в настоящее время? Именно оценка волатильности котировок (цен) основных криптовалют в 2022 г. и в первые три месяца 2023 г. является целью данной работы. Для сопоставления с волатильностью криптовалют оценены волатильность котировки евро и прямого обменного курса рубля (цены доллара США в рублях).

ОСНОВНЫЕ КРИПТОВАЛЮТЫ И ИХ КОТИРОВКИ В 2022–2023 ГГ.

В этом разделе представим основные криптовалюты, обращающиеся на мировых криптобиржах, котировки которых будут объектом нашего исследования.

Bitcoin (BTC)

Приведем красочное описание появления этой первой криптовалюты: «Существует много способов получить деньги: вы можете их заработать, найти на улице, подделать, украсть. А если вы Сатоши Накамото, сверхталантливый компьютерщик-кодировщик, то можете их изобрести. Именно это и сделал Сатоши 3 января 2009 г., ударив по клавише клавиатуры и создав новую валюту под названием “биткоин”. Но там были только биты, и никаких коинов. Ни бумаги, ни меди, ни серебра — только 31 тысяча строк кода и объявление в Интернете[2]».

Bitcoin Cash (BCH)

Bitcoin Cash — криптовалюта, одна из ветвей биткойна, отделившаяся от него 1 августа 2017 г. В ноябре 2018 г. также произошло разделение Bitcoin Cash на несколько веток.

Monero (XMR)

Monero — криптовалюта, ориентированная на повышенную конфиденциальность транзакций. Криптовалюта появилась 18 апреля 2014 г. как ветвь Bytecoin (не путать с Bitcoin).

Dash (DASH)

Dash — это безопасная и анонимная криптовалюта, разработанная в качестве альтернативы Bitcoin в 2014 г. Криптовалюта Dash, также известная ранее как Darkcoin или XCoin, полностью децентрализована и не зависит от внешних регуляторов.

В 2017 г. Dash стал одним из наиболее востребованных и популярных альткоинов и входил в десятку крупнейших по капитализации криптовалют.

[1] Банк России. КРИПТОВАЛЮТЫ: ТРЕНДЫ, РИСКИ, МЕРЫ. Доклад для общественных консультаций, Москва, 2022. URL: https://cbr.ru/Content/Document/File/132241/Consultation_Paper_20012022.pdf (дата обращения: 01.06.2023).

[2] Joshua Davis. The Crypto-Currency. New Yorker. October 10, 2011. URL: https://www.newyorker.com/magazine/2011/10/10/the-crypto-currency (дата обращения: 01.06.2023).

Таблица 1 / Table 1

Цены криптовалют и евро в долларах США и цена доллара США в рублях / Prices of Cryptocurrencies and Euros in U.S. Dollars and the Price of the Dollar in Russian Rubles

Data	BTC	BCH	XMR	DASH	EUR	USA
01.01.2022	46 805	435	232	136	0,88	74
01.02.2022	36 471	285	147	95	0,89	77
01.03.2022	43 085	332	172	100	0,891	94
01.04.2022	45 064	376	212	127	0,903	84
01.05.2022	37 961	278	225	86	0,949	71
01.06.2022	31 898	204	197	66	0,931	62
01.07.2022	20 363	105	116	43	0,955	53
01.08.2022	23 456	142	156	52	0,979	61
01.09.2022	20 159	116	152	45	0,995	60
01.10.2022	19 420	119	148	42	1,02	57
01.11.2022	20 571	116	150	42	1,01	62
01.12.2022	17 137	113	143	43	0,953	61
01.01.2023	16 548	97	147	42	0,934	70
01.02.2023	23 110	134	176	61	0,916	72
01.03.2023	23 335	133	153	72	0,937	75
01.04.2023	28 761	126	157	59	0,923	77

Источник / Source: URL: https://www.calc.ru/ (дата обращения: 01.06.2023) / (accessed on 01.06.2023).

В *табл. 1* приведены котировки (цены) на первую дату каждого месяца 2022–2023 гг. криптовалют BTC, BCH, XMR и DASH, выраженные в долларах США. Там же даны котировки (цены) евро в долларах США и цена доллара США в рублях (прямая котировка рубля); эти котировки потребуются для сравнения их волатильности с волатильностью криптовалют.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ, АНАЛИЗ И РАЗВИТИЕ МЕР ВОЛАТИЛЬНОСТИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Обозначим символом p_t цену некоторого актива в дату t, где t дискретно изменяется с постоянным шагом Δ в промежутке $\left[t_0, t_f\right]$ между датами t_0 и t_f; например, $t_0 = 01.01.2022$, $t_f = 01.04.2023$, $\Delta = 1$ месяц. Символом $t-1$ обозначим дату, предшествующую дате t. Например, $t_f - 1 = 01.03.2023$. Количество промежутков продолжительностью Δ между датами t_0 и t_f обозначим n_f. Так что продолжительность промежутка $\left[t_0, t_f\right]$ между датами t_0 и t_f равна $n_f \cdot \Delta$.

Задача заключается в оценке меры волатильности переменной p_t на промежутке $\left[t_0, t_f\right]$. В теории финансов существуют несколько правил расчета меры волатильности актива, обзор которых представлен в работе М.Ю. Куссый [11, с. 61].

Вначале проанализируем две известные и наиболее популярные меры волатильности [см. выражения (1) и (3)], а в конце данного раздела выполним анализ третьей известной меры волатильности [см. (12)]. В итоге анализа, во-первых, выберем подходящую меру волатильности, а во-вторых, сформулируем требования к мере волатильности актива и, в-третьих, построим с обоснованием новую меру волатильности (13).

Приступаем к обзору и анализу мер волатильности. Первая мера, именуемая «реализованной волатильностью» [11, с. 61] и принятая многими исследователями [11–14], определяется по правилу:

$$RV = \sqrt{\sum_{t=t_0+1}^{t=t_f} \left(\ln \frac{p_t}{p_{t-1}} \right)^2} \,. \tag{1}$$

Величину $\ln \dfrac{p_t}{p_{t-1}}$ в формуле (1) называют [15, с. 247] «логарифмической прибылью» актива на временном промежутке $[t-1,\, t]$. Основанием названия служит приближенное равенство, которое получается при рассуждении в дифференциалах:

$$\ln \frac{p_t}{p_{t-1}} = \ln\left(\frac{p_{t-1} + (p_t - p_{t-1})}{p_{t-1}} \right) = \ln(1 + r_t) \approx r_t. \tag{2}$$

Ниже символом r_t будем обозначать либо величину $\ln \dfrac{p_t}{p_{t-1}}$, либо же значение доходности $r_t = \dfrac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$, что не должно приводить к недоразумениям.

Вторая мера волатильности актива, именуемая «простой волатильностью» [11, с. 61],— это среднее квадратическое отклонение значений r_t на промежутке $[t_0, t_f]$:

$$\hat{\sigma}_\Delta = \sqrt{\frac{1}{n_f - 1} \cdot \sum_{t=t_0+1}^{t=t_f} (r_t - \bar{r})^2} \,, \tag{3}$$

где n_f — количество наблюденных значений r_t на промежутке $[t_0, t_f]$; $\bar{r}$ — среднее арифметическое значений r_t:

$$\bar{r} = \frac{1}{n_f} \cdot \sum_{t=t_0+1}^{t=t_f} r_t \,. \tag{4}$$

Проанализируем эти меры. Рассматривая (1) и (3), констатируем, что обе величины RV и $\hat{\sigma}_\Delta$ являются безразмерными, т.е. не зависят от единиц измерения значений p_t. По этой причине меры (1) и (3) будем именовать мерами **относительной волатильности** активов, и именно по мерам относительной волатильности можно сопоставлять разные активы. Вопрос: какую же из этих мер выбрать и, главное, какой же их смысл? Ниже покажем, что величины (1) и (3) имеют разный смысл! Конкретно, мера (3) измеряет относительную волатильность актива на временных промежутках, имеющих продолжительность Δ (смысл символа Δ отмечен выше). Мера же (1) служит оценкой относительной волатильности актива на промежутке $[t_0, t_f]$, продолжительность которого равна $n_f \cdot \Delta$. При определенной предпосылке (см. ниже) связь между RV и $\hat{\sigma}_\Delta$ задается приближенным равенством:

$$RV \approx \hat{\sigma}_\Delta \cdot \sqrt{n_f} \,. \tag{5}$$

Для обоснования равенства (5) потребуется определение рискового актива. Так в теории финансов [15, с. 247] называют актив, доходность r_t которого в каждую дату $t \in [t_0, t_f]$ может интерпретироваться как случайная переменная. Добавим, что переменная r_t как функция времени чаще всего может трактоваться как стационарный временной ряд с некоррелированными уровнями (это предположение на практике подлежит тестированию). Отметим еще, что если доходность (2) детерминирована (в частности, постоянна при каждом значении $t \in [t_0, t_f]$), то актив (при дополнительном условии) считается безрисковым. Так, например, депозит в надежном банке интерпретируется как безрисковый актив. В следующем замечании сформулируем **два требования к относительной мере волатильности финансового актива**.

Замечание 1. Первое требование к мере волатильности актива кажется очевидным: мера волатильности безрискового актива должна равняться нулю даже в ситуации, когда цена актива p_t изменяется с ходом времени (например, стоимость депозита в надежном банке).

Второе требование сформулируем так: мера волатильности рискового актива должна базироваться на количественных характеристиках его доходности r_t как стационарного временного ряда. Отметим [15, с. 212], что у стационарного временного ряда r_t с некоррелированными уровнями такими характеристиками служат две константы: ожидаемый уровень ряда $\mu = E(r_t)$ и среднее квадратическое отклонение σ. Константа σ — это средний квадратический разброс возможных значений r_t вокруг μ.

Ниже покажем, что двум упомянутым выше требованиям удовлетворяет мера (3), измеряющая относительную волатильность актива (конкретно среднее квадратическое колебание возможных значений его доходности r_t) на временных промежутках продолжительности Δ. В свою очередь, мера (1), измеряющая относительную волатильность актива (конкретно среднее квадратическое колебание возможных значений его доходности R_{t_f}) на временном промежутке продолжительности $n_f \cdot \Delta$ удовлетворяет только первому требованию. А вот второму требованию эта мера удовлетворяет лишь в ситуации, когда ожидаемый уровень $E(r_t)$ доходности r_t актива равен нулю, т.е. когда $\mu = E(r_t) = 0$.

Для обоснования сказанного выше потребуется известное представление цены актива на каждую дату $t \in [t_0 + 1, t_f]$:

$$p_t = p_0 \cdot (1 + r_1) \cdot \ldots \cdot (1 + r_{n_t}). \tag{6}$$

Здесь p_0 — цена актива на дату t_0, $r_1 = \dfrac{p_{t_0+1} - p_0}{p_0}$ — доходность актива на первом промежутке $[t_0, t_0 + 1]$, …, $r_{n_t} = \dfrac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$ — доходность актива на промежутке $[t-1, t]$. Продолжительность промежутка $[t_0, t]$ равна $n_t \cdot \Delta$.

После логарифмирования уравнение (6) принимает с учетом (2) вид:

$$\ln\frac{p_t}{p_0} = \ln\left(\frac{p_0 + (p_t - p_0)}{p_0}\right) = \ln(1 + R_t) = \sum_{i=1}^{n_t} r_i . \tag{7}$$

Здесь символом $R_t = \dfrac{p_t - p_0}{p_0}$ обозначена доходность актива на временном промежутке $[t_0, t]$; так, например, $R_{t_0+1} = r_1$. Еще раз отметим, что продолжительность промежутка $[t_0, t]$ равна $n_t \cdot \Delta$.

Рассуждая в дифференциалах [см. (2)], равенство (7) представим в виде:

$$R_t = \sum_{i=1}^{n_t} r_i . \tag{8}$$

По предположению, уровни r_t некоррелированы и образуют стационарный временной ряд с параметрами (μ, σ). Следовательно, по правилу (4) вычисляется наилучшая линейная несмещенная оценка $\overline{r}$ параметра μ, а по формуле (3) рассчитывается наилучшая оценка $\hat{\sigma}_\Delta$ параметра σ [15, с. 182]. Далее из равенства (8) следуют два утверждения. Первое утверждение: переменная R_t **как функция времени** является нестационарным временным рядом, конкретно — случайным блужданием (со сносом) [16, с. 245]. Второе утверждение [15, с. 111]: величина R_t является случайной переменной с ожидаемым значением $E(R_t) = \mu \cdot n_t$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_{R_t} = \sqrt{Var(R_t)} = \sigma \cdot \sqrt{n_t}$. Следовательно, наилучшая оценка $\hat{\sigma}_{R_t}$ среднего квадратического отклонения доходности R_t на промежутке $[t_0, t]$ имеет вид

$$\hat{\sigma}_{R_t} = \hat{\sigma}_\Delta \cdot \sqrt{n_t} . \tag{9}$$

Это и есть мера относительной «простой волатильности» актива на промежутке $[t_0, t]$. На всем промежутке $[t_0, t_f]$ мера относительной «простой волатильности» актива определяется по правилу:

$$\hat{\sigma}_{R_f} = \hat{\sigma}_{\Delta} \cdot \sqrt{n_f} \,. \tag{10}$$

Остается исследовать меру (1). С учетом известного равенства $E\left(r_t^2\right) = \mu^2 + \sigma^2$ и обозначения (2) вычислим ожидаемое значение $E\left(RV^2\right)$ меры (1):

$$E\left(RV^2\right) = \sum_{t=t_0+1}^{t=t_f} E\left(r_t\right)^2 = n_f \cdot \left(\mu^2 + \sigma^2\right). \tag{11}$$

Сопоставляя (11) и (10), констатируем, что «реализованная волатильность» (1) удовлетворяет второму требованию к мере волатильности актива и практически совпадает с «простой волатильностью» (10) лишь в ситуации, когда ожидаемый уровень доходности актива $\mu = E\left(r_t\right) = 0$. В противном же случае, «реализованная волатильность» несколько превышает волатильность актива. Близкие значения (1) и (10) служат наглядным симптомом справедливости гипотезы $H_0 : E\left(r_t\right) = 0$ о равенстве нулю ожидаемого уровня доходности актива. Добавим, что мера (10) более гибкая, поскольку позволяет оценивать волатильность актива на разных временных промежутках $[t_0, t] \in [t_0, t_f]$.

Замечание 2. Вернемся еще раз к характеристикам волатильности (1) и (10). И та и другая характеристика измеряет неопределенность именно **доходности** $\boldsymbol{R_f = \dfrac{p_f - p_0}{p_0}}$ актива и, естественно, является безразмерной величиной. Доходность, как видно, служит относительной характеристикой актива, и поэтому выше обсужденные меры оценивают волатильность именно относительной характеристики актива — его доходности. Быть может, это обстоятельство лишает характеристики (1) и (10) полной наглядности, и, возможно, яснее был бы виден смысл понятия «волатильности актива», если бы мера волатильности выражалась непосредственно в единицах измерения цены актива p_t. В обзоре мер волатильности активов [11, с. 61] отмечена третья мера волатильности, которая тоже именована «реализованной волатильностью», имеет размерность цены p_t и определяется по правилу:

$$V_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{t=n} \left(p_t - \overline{p}\right)^2} \,. \tag{12}$$

Если сравнить формулу (12) с выражением (3), то может возникнуть впечатление, что по формуле (12) вычисляется доброкачественная оценка среднего квадратического отклонения цены p_t актива. Однако это не так по той причине, что, как известно [15, с. 243], в общем случае цена актива p_t — это временной нестационарный ряд и, следовательно, значение среднего квадратического отклонения цены p_t является функцией времени [15, с. 245]. Это значит, что среднее квадратическое отклонение p_t не является постоянной величиной. Следовательно, мера (12) не имеет ясного смысла и не является обоснованной. Добавим, что мера (12) не удовлетворяет обоим требованиям к мере волатильности, сформулированным в замечании 1.

Можно ли построить обоснованную меру волатильности цены актива, выраженную непосредственно в единицах его цены? Можно, и такая мера построена ниже и названа мерой абсолютной волатильности актива.

ПОСТРОЕНИЕ МЕРЫ АБСОЛЮТНОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ АКТИВА

Обоснуем следующую меру абсолютной волатильности актива

$$\hat{\sigma}_{p_t} = p_0 \cdot \hat{\sigma}_{\Delta} \cdot \sqrt{n_t} \,. \tag{13}$$

В этой формуле величина $\hat{\sigma}_{p_t}$ выражена в единицах измерения цены p_t актива, и именно в этих единицах измеряет волатильность на промежутке $[t_0, t]$ той части стоимости актива p_t, которая порождена неопределенностью **в значениях доходности** $\boldsymbol{R_t}$ (см. ниже). Величину $\hat{\sigma}_{p_t}$ можно также интерпретировать как возможные средние потери инвестора на временном промежутке $[t_0, t]$. Подчеркнем, что значение p_0 цены актива на начальную дату t_0 является в выражении (13) известной константой.

Для обоснования правила (13) вернемся к равенству (7). Уровень доходности актива $R_t = \frac{p_t - p_0}{p_0}$ представим в виде суммы:

$$R_t = \bar{R}_t + \Delta R_t . \tag{14}$$

Здесь символом $\bar{R}_t$ обозначена детерминированная часть доходности актива (так, например, у депозита эта величина вычисляется по правилу $\bar{R}_t = \mu \cdot n_t$). Символом ΔR_t в равенстве (14) обозначена та часть доходности актива, которая генерирована неопределенностью в значении R_t (так, у депозита в надежном банке $\Delta R_t = 0$). Подчеркнем, что мера (9) волатильности актива характеризует именно волатильность слагаемого ΔR_t.

С учетом (14) перепишем уравнение (7) в виде:

$$p_t = p_0 \cdot \left(1 + R_t\right) = p_0 \cdot \left(1 + \bar{R}_t + \Delta R_t\right) = p_0 \cdot \left(1 + \bar{R}_t\right) + p_0 \cdot \Delta R_t . \tag{15}$$

Здесь первое слагаемое $p_0 \cdot \left(1 + \bar{R}_t\right) = \bar{p}_t$ — это детерминированная часть стоимости p_t актива, и, согласно замечанию 1, волатильность этого слагаемого равна нулю. А вот второе слагаемое $p_0 \cdot \Delta R_t = \Delta p_t$ — эта часть стоимости актива, которая порождена именно неопределенностью ΔR_t. Отсюда с учетом (9) получаем обоснование правила (13) расчета абсолютной меры «простой волатильности» актива.

Следствие. По аналогии с обоснованием формулы (13) выводится правило расчета меры абсолютной «простой волатильности» актива на любом промежутке $\left[t_1, t_2\right] \subset \left[t_0, t_f\right]$, имеющим длительность $\Delta \cdot n_{t_1, t_2}$:

$$\hat{\sigma}_{p_{t_1, t_2}} = p_{t_1} \cdot \hat{\sigma}_{\Delta} \cdot \sqrt{n_{t_1, t_2}} . \tag{16}$$

Так, например, мера абсолютной волатильности актива на промежутке $[t - 1, t]$ с длительностью Δ вычисляется по правилу

$$\hat{\sigma}_{p_{t-1, t}} = p_{t-1} \cdot \hat{\sigma}_{\Delta} . \tag{17}$$

Подчеркнем, что в формуле (16) значения p_{t_1} цены актива на дату t_1 интерпретируется как известная константа. Аналогично, в формуле (17) значение p_{t-1} цены актива на дату $t - 1$ является известной константой.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МЕР ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Меры относительной и абсолютной волатильности, соответственно, (3) и (17), допускают полезную для практики интерполяции. Рассмотрим промежуток длительности Δ между датами $[t — 1, t]$; например, $\Delta = 1$ месяц. Согласно сказанному выше, мера (3) имеет смысл среднего квадратического отклонения доходности r_t актива на промежутке $[t — 1, t]$. Предположим, что нужно вычислить меру относительной волатильности актива $\hat{\sigma}_\delta$ между датами $[t — 1, t]$ на промежутках меньшей длительности δ; например, длительности $\delta = 1$ день. Обозначим символом m количество промежутков длительности δ, общая продолжительность которых равна Δ; так, например, при $\Delta = 1$ месяц и $\delta = 1$ день величина $m = 30$. Вспоминая аддитивную структуру доходности актива [см. (8)], представим значение r_t в виде следующей суммы:

$$r_t = r_{t,1} + r_{t,2} + \ldots + r_{t,i} + r_{t,m} . \tag{18}$$

Здесь $r_{t,1}$ — доходность актива на первом промежутке длительности δ между датами $\left[t - 1, t_1\right]$, $r_{t,2}$ — доходность актива на втором промежутке длительности δ между датами $\left[t_1, t_2\right]$ и т.д.

Не наблюденные слагаемые $r_{t,i}$ в правой части равенства (18) интерпретируем как некоррелированные случайные переменные с единым средним квадратическим отклонением σ_δ. Из этого предположения и формулы (18) следует равенство $\hat{\sigma}_\Delta = \hat{\sigma}_\delta \cdot \sqrt{m}$ или, что равносильно, равенство

$$\hat{\sigma}_{\delta} = \hat{\sigma}_{\Delta} \cdot \sqrt{\frac{1}{m}} . \quad (19)$$

Это и есть мера относительной волатильности актива на промежутках длительности δ. В свою очередь, мера абсолютной волатильности актива на промежутке длительности $\delta \cdot i$ между датами $\left[t-1, t_i\right]$ вычисляется с учетом (16) по правилу

$$\hat{\sigma}_{p_{t-1-t_i}} = p_{t-1} \cdot \hat{\sigma}_{\delta} \cdot \sqrt{m_i} . \quad (20)$$

Здесь m_i — количество промежутков длительности δ между датами $\left[t-1, t_i\right]$.

В следующих пунктах для отмеченных выше криптовалют, евро и прямого обменного курса рубля (цены в рублях доллара США) протестированы предпосылки корректного использования обсужденных выше мер волатильности, а затем вычислены значения мер волатильности (1), (10) и (13) этих активов на временном промежутке $[t_0 = 01.01.2022, \ t_f = 01.04.2023]$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДПОСЫЛОК КОРРЕКТНОСТИ РАСЧЕТА МЕР ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Для корректного использования обсужденных ранее мер волатильности (1), (3), (9), (13), (19) и (20) необходимо проверить предположение о стационарности временного ряда доходности $r_t = \ln \frac{p_t}{p_{t-1}}$ каждого исследуемого актива. Для наглядности в *табл. 2* представлены значения доходности r_t исследуемых активов на промежутках длительности $\Delta = 1$ месяц, вычисленные согласно *табл. 1*.

Таблица 2 / Table 2

Значения доходности криптовалют, евро и цены доллара в рублях / Values of the Yield of Cryptocurrencies, Euros and the Dollar Price in Rubles

t	*r*BTC	*r*BCH	*r*XMR	*r*DASH	*r*EUR	*r*USA
01.02.2022	−0,25	−0,42	−0,46	−0,36	0,01	0,04
01.03.2022	0,17	0,15	0,16	0,05	0,00	0,20
01.04.2022	0,04	0,12	0,21	0,24	0,01	−0,11
01.05.2022	−0,17	−0,30	0,06	−0,39	0,05	−0,17
01.06.2022	−0,17	−0,31	−0,13	−0,26	−0,02	−0,14
01.07.2022	−0,45	−0,66	−0,53	−0,43	0,03	−0,16
01.08.2022	0,14	0,30	0,30	0,19	0,02	0,14
01.09.2022	−0,15	−0,20	−0,03	−0,14	0,02	−0,02
01.10.2022	−0,04	0,03	−0,03	−0,07	0,02	−0,05
01.11.2022	0,06	−0,03	0,01	0,00	−0,01	0,08
01.12.2022	−0,18	−0,03	−0,05	0,02	−0,06	−0,02
01.01.2023	−0,03	−0,15	0,03	−0,02	−0,02	0,14
02.01.2023	0,33	0,32	0,18	0,37	−0,02	0,03
03.01.2023	0,01	−0,01	−0,14	0,17	0,02	0,04
04.01.2023	0,21	−0,05	0,03	−0,20	−0,02	0,03

Источник / Source: составлено авторами / Compiled by the authors.

Исследование предпосылки о стационарности временного ряда $r_t = \ln\frac{p_t}{p_{t-1}}$, т.е. исследование статистической гипотезы $H_0 : r_t \in I(0)$ против альтернативы $H_1 : r_t \in I(1)$, означающей нестационарность временного ряда r_t, осуществим в статистическом приложении R сначала при помощи теста Дики-Фуллера [16, с. 66], который реализован в функции adf.test(), и, подчеркнем, тестирует гипотезу $H_1 : r_t \in I(1)$ против альтернативы $H_0 : r_t \in I(0)$. Затем для временного ряда r_t каждого актива построим модель $ARIMA(p,d,q)$, используя функцию auto.arima(). Отметим, что в модели $ARIMA(p,d,q)$ в ситуации стационарного временного ряда параметр d принимает значение 0 [16, с. 64]; если к тому же стационарный временной ряд имеет некоррелированные уровни, т.е. является **белым шумом**, то справедливо равенство $p = q = 0$. Добавим, что в функции auto.arima() автоматически тестируется и гипотеза о равенстве нулю ожидаемого значения доходности актива. Результаты данного исследования представлены в *табл. 3*.

Таблица 3 / Table 3

Результаты теста Дики-Фуллера и модели $ARIMA(p,d,q)$ доходности исследуемых активов / Results of the Dickey-Fuller Test and the *ARIMA(p, d, q)* Model of Returns on the Surveyed Assets

Актив / Asset	Решающее правило теста Дики-Фуллера гипотезы о нестационарности доходности активов (уровень значимости α = 0,1) / The decisive rule of the Dickey-Fuller test of the hypothesis of nonstationarity of asset returns (significance level α = 0.1)	Модели $ARIMA(p,d,q)$ доходности r_t актива и итог теста гипотезы о равенстве нулю ожидаемого значения $E(r_t)$ / ARIMA (*p, d, q*) models of the return of an asset r_t and the outcome of the hypothesis test that the expected value of $E(r_t)$ is equal to zero
BTC	p-value = 0,02345. Гипотеза о нестационарности отклоняется	ARIMA (0, 0, 0) with zero mean
BCH	p-value = 0,01007. Гипотеза о нестационарности отклоняется	ARIMA (0, 0, 0) with zero mean
Monero	p-value = 0,01. Гипотеза о нестационарности отклоняется	ARIMA (0, 0, 0) with zero mean
DASH	p-value = 0,02236. Гипотеза о нестационарности отклоняется	ARIMA (0, 0, 0) with zero mean
EUR	p-value = 0,07642. Гипотеза о нестационарности отклоняется	ARIMA (0, 0, 0) with zero mean
Доллар USA	p-value = 0,02345. Гипотеза о нестационарности отклоняется	ARIMA (0, 0, 0) with zero mean

Источник / Source: составлено авторами на основе расчетов в R / Compiled by the authors based on the calculation in R.

Представленные в *табл. 3* результаты исследования статистических свойств доходности криптовалют, евро и доллара США (прямого обменного курса рубля) позволяют сделать вывод, что значения доходности этих активов (см. *табл. 2*) могут интерпретироваться как стационарные временные ряды с некоррелированными уровнями и нулевыми ожидаемыми значениями. Следовательно, выполненный ниже расчет обсужденных ранее мер волатильности (1), (3), (9), (13), (19) и (20) корректен.

МЕРЫ ВОЛАТИЛЬНОСТИ КОТИРОВОК КРИПТОВАЛЮТ, ЕВРО И ДОЛЛАРА США НА ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ [01.01.2022, 01.04.2023]

В *табл. 4* приведены значения мер волатильности $\hat{\sigma}_\Delta$, $\hat{\sigma}_{R_f}$, $\widehat{RV}$, $\hat{\sigma}_\delta$, $\hat{\sigma}_{p_f}$, $\hat{\sigma}_{p_{01.04.23-11.04.23}}$ обсужденных выше активов. Для наглядности значения мер волатильности $\hat{\sigma}_\Delta$, $\hat{\sigma}_{R_f}$, RV и $\hat{\sigma}_\delta$ выражены в процентах. Значения мер абсолютной волатильности $\hat{\sigma}_{p_f}$ и $\hat{\sigma}_{p_{01.04.23-11.04.23}}$ выражены в единицах цены соответствующего актива. Напомним смысл мер волатильности, значения которых приведены в *табл. 4*: 1) $\hat{\sigma}_\Delta$ — ср. квадратическое колебание доходности актива на промежутках в 1 месяц; 2) $\hat{\sigma}_\delta$ — ср. квадратическое колебание доходности актива на промежутках в 1 день; 3) $\hat{\sigma}_{R_f}$ и RV —

ср. квадратическое колебание доходности актива на промежутке в 15 месяцев между датами $01.01.2022$ и $01.04.2023$; 4) $\hat{\sigma}_{p_f}$ — ср. квадратическое колебание цены актива на промежутке в 15 месяцев между датами $01.01.2022$ и $01.04.2023$; 5) $\hat{\sigma}_{p_{01.04.23-11.04.23}}$ — ср. квадратическое колебание цены актива на промежутке в 10 дней между датами $01.04.2022$ и $11.04.2023$.

Таблица 4 / Table 4

Меры волатильности криптовалют, евро и цены доллара / Measures of Volatility of Cryptocurrencies, the Euro and the Price of the Dollar

Мера / Measure	BTC	BCH	XMR	DASH	EUR	USA
$\hat{\sigma}_{\Delta}\,(\%)$	20	27	23	24	3	11
$\hat{\sigma}_{R_f}\,(\%)$	78	104	91	94	10	44
$RV\,(\%)$	77	105	85	94	10	42
$\hat{\sigma}_{\delta}\,(\%)$	3,7	4,9	4,3	4,4	0,5	2,0
$\hat{\sigma}_{p_{01.04.23-11.04.23}}$	3365 (долл.)	20 (долл.)	21 (долл.)	8 (долл.)	0,01 (долл.)	5 (руб.)
$\hat{\sigma}_{p_f}$	36736 (долл.)	452 (долл.)	210 (долл.)	127 (долл.)	0,09 (долл.)	32 (руб.)

Источник / Source: составлено авторами / Compiled by the authors.

Прокомментируем содержимое *табл. 4* на примере криптовалюты Bitcoin (BTC). Месячная относительная волатильность Bitcoin в среднем составляет $\hat{\sigma}_{\Delta} = 20\%$; относительная волатильность Bitcoin на промежутке $[t_0 = 01.01.2022,\ t_f = 01.04.2023]$ с продолжительностью в 15 месяцев равна $\hat{\sigma}_{R_f} = 78\%$; значение меры абсолютной волатильности Bitcoin (т.е. возможные средние потери инвестора на этом промежутке при владении одним биткойном) составляют $\hat{\sigma}_{p_f} = 36\,736$ долл. Средние дневные колебания доходности Bitcoin равны $\hat{\sigma}_{\delta} = 3{,}7\%$. Оценка колебания **цены** биткойна за 10 дней между датами $01.04.2022$ и $11.04.2023$ оказалась раной $\hat{\sigma}_{p_{01.04.23-11.04.23}} = 3365$ долл.

Для сравнения, оценка среднего колебания прямого обменного курса рубля (цены доллара в рублях) за 10 дней между датами $01.04.2022$ и $11.04.2023$ **составляет 5 рублей**.

Меры относительной волатильности RV и $\hat{\sigma}_{R_f}$ активов практически совпадают, что, во-первых, служит симптомом справедливости предположения $H_0 : E(r_t) = 0$ о равенстве нулю ожидаемых значений доходности активов (что протестировано выше), а во-вторых, свидетельствует о корректности выполненного анализа этих мер.

ВЫВОДЫ

1. Строгое обоснование имеют две известные меры (1) и (3) относительной волатильности активов. Смысл значений этих мер разный, и их взаимосвязь задается уравнением (5). Сравнивать активы по волатильности можно только при помощи относительных мер волатильности (1) и (3). Более гибкой мерой относительной волатильности является мера (3).

2. Третья известная мера (12) абсолютной волатильности активов не является обоснованной и не имеет ясного смысла.

3. Построенная и обоснованная в данной работе мера (13) абсолютной волатильности активов имеет размерность стоимости актива, и ее значение измеряет ту часть стоимости актива, которая (часть) генерирована неопределенностью в значениях доходности актива.

4. Мера (3) относительной волатильности и мера (13) абсолютной волатильности допускают полезную для практики интерполяцию соответственно (19) и (20).

5. Самой волатильной криптовалютой является Bitcoin Cash. Наименьшую же относительную волатильность среди криптовалют имеет Bitcoin. Однако высокая стоимость биткойна порождает высокую меру его абсолютной волатильности, т.е., другими словами, порождает большие возможные средние потери инвестора при владении биткойном. Для сравнения, относительная волатильность прямого обменного курса рубля (цены доллара) примерно в два раза меньше волатильности Bitcoin. Вне конкуренции по относительной волатильности оказывается котировка евро: относительная волатильность EUR на промежутке $[t_0 = 01.01.2022, t_f = 01.04.2023]$ с продолжительностью в 15 месяцев равна: $\sigma_{R_f} =$ 10%! Это почти **на порядок меньше** относительной волатильности криптовалют и в **4 раза меньше** относительной волатильности прямого обменного курса рубля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Phillips P.C.B., Shi S., Yu J. Testing for multiple bubbles: Historical episodes of exuberance and collapse in the S&P 500. *International Economic Review*. 2015;56(4):1043–1078. DOI: 10.1111/iere.12132
2. Filimonov V., Sornette D. A stable and robust calibration scheme of the log-periodic power law model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2013;392(17):3698–3707. DOI: 10.1016/j.physa.2013.04.012
3. Geuder J., Kinateder H., Wagner N.F. Cryptocurrencies as financial bubbles: The case of Bitcoin. *Finance Research Letters*. 2019;31. DOI: 10.1016/j.frl.2018.11.011
4. Enoksen F.A., Landsnes Ch.J., Lučivjanská K., Molnár P. Understanding risk of bubbles in cryptocurrencies. *Journal of Economic Behavior and Organization*. 2020;176:129–144. DOI: 10.1016/j.jebo.2020.05.005
5. Zhang J., Xu Y., Wang H. Cryptocurrency price bubble detection using log-periodic power law model and wavelet analysis. *SSRN Electronic Journal*. 2021. DOI: 10.2139/ssrn.3983539
6. Kyriazis N., Papadamou S., Corbet S. A systematic review of the bubble dynamics of cryptocurrency prices. *Research in International Business and Finance*. 2020;54:101254. DOI: 10.1016/j.ribaf.2020.101254
7. Caferra R., Tedeschi G., Morone A. Bitcoin: Bubble that bursts or Gold that glitters? *Economics Letters*. 2021;205:109942. DOI: 10.1016/j.econlet.2021.109942
8. Уилан Ч. Голые деньги: откровенная книга о финансовой системе. Пер. с англ. М.: Манн, Иванов и Фербер; 2022. 384 с.
   Wheelan Ch. Naked money: A revealing look at our financial system. New York, NY: W.W. Norton & Co.; 2017. 368 p. (Russ. ed.: Wheelan Ch. Golye den'gi: otkrovennaya kniga o finansovoi sisteme. Moscow: Mann, Ivanov and Ferber; 2022. 384 p.).
9. Крылов Г.О., Лисицын А.Ю., Поляков Л.И. Сравнительный анализ волатильности криптовалют и фиатных денег. *Финансы: теория и практика*. 2018;22(2):66–89. DOI: 10.26794/2587–5671–2018–22–2–66–89
   Krylov G.O., Lisitsyn A. Yu., Polyakov L.I. Comparative analysis of volatility of cryptocurrencies and fiat money. *Finance: Theory and Practice*. 2018;22(2):66–89. (In Russ.). DOI: 10.26794/2587–5671–2018–22–2–66–89
10. Andersen T.G., Bollerslev T. Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economic Review*. 1998;39(4):885–905. DOI: 10.2307/2527343
11. Куссый М.Ю. Методологические аспекты измерения волатильности. *Ученые записки Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского. Экономика и управление*. 2018;4(1):59–78. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodologicheskie-aspekty-izmereniya-volatilnosti
    Kussy M. Yu. Metodological characteristics of volatility assessment. *Uchenye zapiski Krymskogo federal'nogo universiteta imeni V.I. Vernadskogo. Ekonomika i upravlenie = Scientific Notes of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Economics and Management*. 2018;4(1):59–78. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodologicheskie-aspekty-izmereniya-volatilnosti (In Russ.).
12. Аганин А.Д., Пересецкий А.А. Волатильность курса рубля: нефть и санкции. *Прикладная эконометрика*. 2018;(4):5–21. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/volatilnost-kursa-rublya-neft-i-sanktsii
    Aganin A.D., Peresetsky A.A. Volatility of ruble exchange rate: Oil and sanctions. *Prikladnaya ekonometrika = Applied Econometrics*. 2018;(4):5–21. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/volatilnost-kursa-rublya-neft-i-sanktsii (In Russ.).
13. Аганин А.Д., Маневич В.А., Пересецкий А.А., Погорелова П.В. Сравнение моделей прогноза волатильности криптовалют и фондового рынка. *Экономический журнал Высшей школы экономики*. 2023;27(1):49–77. DOI: 10.17323/1813–8691–2023–27–1–49–77

Aganin A., Manevich V., Peresetsky A., Pogorelova P. Comparison of cryptocurrency and stock market volatility forecast models. *Ekonomicheskii zhurnal Vysshei shkoly ekonomiki = The HSE Economic Journal*. 2023;27(1):49–77. (In Russ.). DOI: 10.17323/1813–8691–2023–27–1–49–77

14. Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology*. 2002;64(2):253–280. DOI: 10.1111/1467–9868.00336
15. Бывшев В.А. Эконометрика. М.: Финансы и статистика; 2008. 480 с.
Byvshev V.A. Econometrics. Moscow: Finansy i statistika; 2008. 480 p. (In Russ.).
16. Бывшев В.А. Моделирование финансово-экономических временных рядов в R. М.: Фин. ун-т при Правительстве Рос. Федерации; 2019. 110 с.
Byvshev V.A. Modeling of financial and economic time series in R. Moscow: Financial University under the Government of the Russian Federation; 2019. 110 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / ABOUT THE AUTHORS

Виктор Алексеевич Бывшев — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры математики факультета информационных технологий и анализа больших данных, Финансовый университет, Москва, Россия
Victor A. Byvshev — Dr. Sci. (Tech.), Prof., Department of Information Technology and Big Data Analysis, Financial University, Moscow, Russia
https://orcid.org/0000-0002-8234-4936
Автор для корреспонденции / Corresponding author:
VByvshev@fa.ru

Наталия Алексеевна Ященко — доцент кафедры математики факультета информационных технологий и анализа больших данных, Финансовый университет, Москва, Россия
Nataliya A. Yashchenko — Assoc. Prof., Department of Information Technology and Big Data Analysis, Financial University, Moscow, Russia
https://orcid.org/0000-0003-0039-791X
nayaschenko@fa.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Conflicts of Interest Statement: The authors have no conflicts of interest to declare.

Статья поступила в редакцию 16.06.2023; после рецензирования 26.07.2023; принята к публикации 27.08.2023.
Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
The article was submitted on 16.06.2023; revised on 26.07.2023 and accepted for publication on 27.08.2023.
The authors read and approved the final version of the manuscript.