ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-2-143-165
УДК 336.763(045)
JEL G11, G12, G17, G32

О преобразовании различных мер финансовых рисков при их ограничении на исходах, связанных с потерями

В.Б. Минасян
Высшая школа финансов и менеджмента Российской академии народного хозяйства и государственной службы, Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

При оценке рисков при совершении инвестиций в различные финансовые активы риск-менеджмент сосредотачивается на анализе худших значений возможных потерь (правом хвосте распределения потерь). Но при этом, чаще всего, говоря о потерях, предполагается, что они могут в принципе принимать и отрицательные значения (что соответствует получению положительных прибылей). Однако существует масса теоретических исследований, предполагающих, что потери принимают лишь положительные значения. Многие практикующие риск-менеджеры при оценке соответствующих мер риска статистическим методом или методом Монте Карло при оценке используют лишь часть выборки данных, которые соответствуют только положительным значениям потерь. **Целью** данной работы является исследование преобразования оценок риска различного уровня катастрофичности при таком изменении пространства элементарных событий, а значит, и закона распределения потерь. В работе применяются **методы** анализа финансовых рисков различных уровней катастрофичности, в том числе методы, развитые в предыдущих работах автора. В **результате** исследования выяснилось, что при таком преобразовании случайной величины потерь существенно преобразуются и все важнейшие оценки с помощью мер рисков различной катастрофичности. Автор делает **вывод**, что теоретические выводы работы будут способствовать и более осознанному пониманию теоретических результатов и результатов практических оценок рисков в зависимости от того, на какой основе производилась данная оценка: позволяя потерям принимать и отрицательные значения или сосредотачиваясь лишь на их положительных значениях.

Ключевые слова: преобразование мер риска; ограничение меры риска на потерях; катастрофические финансовые риски; меры риска искажения ожидания; когерентные меры финансовых рисков; меры риска *VaR* в степени *t*; меры риска *ES* в степени *t*

***Для цитирования*: Минасян В.Б. О преобразовании различных мер финансовых рисков при их ограничении на исходах, связанных с потерями. *Финансы: теория и практика*. 2024;28(2):143-165. DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-2-143-165**

ORIGINAL PAPER

Transformation of Various Measures of Financial Risks with their Limitation on Outcomes Associated with Losses

V.B. Minasyan
Higher School of Finance and Management, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

ABSTRACT

In assessing the risk of investing in various financial assets, risk management focuses on the analysis of the worst possible losses (the right tail of the loss distribution). At the same time, most often, when speaking about losses, it is assumed that losses can, in principle, take on negative values (which corresponds to receiving positive profits). However, there are many theoretical studies suggesting that losses take only positive values. Many risk managers use only a portion of the sample of data that corresponds to positive losses when assessing the relevant risk measures using the statistical method or the Monte Carlo method. The **purpose** of this paper is to study the transformation of risk estimates

of various levels of catastrophicity with such a change in the space of elementary events, and hence the law of loss distribution. The paper uses methods of analysis of financial risks of various levels of catastrophicity, including methods developed in the author's previous papers. As a **result** of the study, it turned out that with such a transformation of the random value of losses, all the most important estimates are significantly transformed with the help of risk measures of various catastrophicity. The author **concludes** that the theoretical conclusions of the work will also contribute to a more conscious understanding of the theoretical results and the results of practical risk assessments, depending on the basis on which this assessment was made: allowing losses to accept negative values or focusing only on their positive values.
Keywords: transformation of risk measures; limitation of risk measures on losses; catastrophic financial risks; risk measures distortion of expectation; coherent measures of financial risks; measures of risk *VaR* in degree *t*; risk measures *ES* to the power *t*

For citation: **Minasyan V.B. Transformation of various measures of financial risks with their limitation on outcomes associated with losses. *Finance: Theory and Practice*. 2024;28(2):143-165. (In Russ.). DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-2-143-165**

ВВЕДЕНИЕ

Основным объектом исследования как в области риск-менеджмента, так в страховом бизнесе являются риски, которые моделируются в виде случайных величин X, представляющих интерес для риск-менеджеров или актуариев. Оценка и управление этими рисками являются основными задачами, которые решаются данными специалистами. С точки зрения анализа рисков представляют интерес величины неблагоприятных значений величины X, а также степени их возможностей, которые определяются законом распределения величины X. Часто под случайной величиной, характеризующей соответствующий риск, понимают величину прибыли — и тогда неблагоприятные значения представляются отрицательными значениями прибыли; или величину потерь — и тогда неблагоприятные значения представляются положительными значениями потерь. Но при этом чаще всего предполагается, что величина X может в принципе принимать любые как положительные, так и отрицательные значения. Мы в данной работе будем считать, что величина X представляет величину потерь, и ее положительные значения будем интерпретировать как потери, а отрицательные значения — как соответствующие прибыли. Ведь изначально, занимаясь бизнесом, предприниматель надеется получить определенную прибыль, но понимает, что все может закончиться фиксацией убытков, что и воспринимается как соответствующее проявление рисков. Поэтому мы предполагаем, что величина потерь X является случайной величиной, распределенной на всей прямой $(-\infty,+\infty)$.

Но иногда исследователи изучают величину потерь, предполагая априори их неотрицательными, $X \geq 0$ (см., например, [1]). Однако в реальности в результате инвестиций можно получить как прибыли, так и убытки. И тогда предположение неотрицательности потерь означает всего лишь сосредоточенность исследователя или риск-менеджера компании в практике анализа рисков лишь на исходах, приводящих к потерям. В данной работе мы хотим обратить внимание на то, что у этой величины потерь распределение вероятностей будет отличаться от распределения вероятностей величины потерь распределенной на всей прямой $(-\infty,+\infty)$. И соответственно, оценки рисков при одном и другом представлении случайной величины, представляющей риски, будут отличаться иногда значительно. Исследованию того, как сильно может измениться оценка риска при переходе от одного представления соответствующей случайной величины как распределенной на всей прямой $(-\infty,+\infty)$ к представлению ее в виде случайной величины в предположении, что реализуются лишь ее положительные значения, не уделялось должного внимания. Мы постараемся подробно рассмотреть данную проблему.

СВЯЗЬ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ *X* С ЕЕ ОГРАНИЧЕНИЕМ ЛИШЬ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Пусть мы интересуемся риском потерь, связанным со значениями случайной величины X, принимающей значения на всей прямой $(-\infty,+\infty)$. Обозначим ее функцию распределения через $F_X(x)$, $x \in (-\infty,+\infty)$. Как известно, $F_X(x) = P[X < x]$ (через $P[A]$ обозначается вероятность случайного события A). Предположим, что существует непрерывная плотность распределения величины X, $f_X(x)$, $x \in (-\infty,+\infty)$. При этом $f_X(x) = F'_X(x)$.

Предположим, что исследователь сосредоточен лишь на исходах, связанных с реальными потерями, когда $X \geqslant 0$. При этом данная сосредоточенность приводит к двум различным подходам исследования величины потерь.

1. Иногда интерес сводится к замене в исследовании величин X на величины X_+, связанной со случайной величиной X следующим образом:

$$X_+ = \begin{cases} X, \text{если } X \geq 0 \\ 0, \text{если } X < 0. \end{cases}$$

Заметим, что величину X_+ можно представить и в следующем виде: $X_+ = XI_{\{X \geq 0\}}$, где через $I_{\{A\}}$ обозначена индикаторная функция события A:

$$I_{\{A\}} = \begin{cases} 1, \text{если событие А исполняется} \\ 0, \text{если событие А не исполняется.} \end{cases}$$

Интуитивно очевидно, что характеристики распределения величины X_+ будут отличаться от соответствующих характеристик распределения случайной величины X. Попытаемся получить выражения для функции и плотности распределения X_+ через соответствующие характеристики для X.

Обозначим через $F_{X_+}(x)$ функцию распределения для X_+, т.е. $F_{X_+}(x) = P[X_+ < x]$. Предположим, что $x > 0$, тогда по формуле полной вероятности имеем:

$$F_{X_+}(x) = P[X_+ < x \mid X \geq 0]P[X \geq 0] + P[X_+ < x \mid X < 0]P[X < 0] =$$

$$= P[X_+ < x \mid X \geq 0]P[X \geq 0] + P[0 < x \mid X < 0]P[X < 0]$$

(здесь и далее через $P[A \mid B]$ обозначена условная вероятность события A при условии исполнения события B), но, учитывая, что, очевидно, $\Pr[0 < x \mid X < 0] = 1$, получаем:

$$F_{X_+}(x) = \frac{P[0 \leq X < x]}{P[X \geq 0]} P[X \geq 0] + P[X < 0] =$$

$$= P[0 \leq X < x] + P[X < 0] = P[X < x].$$

Тогда получаем, что при $x > 0$, $F_{X_+}(x) = F_X(x)$, и так как очевидно, что при $x \leq 0$, $F_{X_+}(x) = 0$,

$$\text{получаем } F_{X_+}(x) = \begin{cases} F_X(x), \text{если } x > 0 \\ 0, \quad \text{если } x \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Соответственно, если обозначить через $f_{X_+}(x)$ плотность распределения величины X_+, так как при $x > 0$ $f_{X_+}(x) = F'_{X_+}(x) = f_X(x)$, то получаем формулу $f_{X_+}(x) = f_X(x)I_{\{x>0\}} + F_X(0)\delta(x)$, (2)
справедливую при всех значениях x, где $\delta(x)$ — известная δ-функция Дирака.

Мы видим, как преобразовалась функция распределения при переходе от моделирования величины потерь как случайной величины X к ее моделированию в виде случайной величины X_+.

Из полученных выражений следуют выражения для расчета ожидаемого значения и дисперсии случайной величины X_+:

$$E[X_+]=\int_0^{+\infty} xf_X(x)dx,$$

$$D[X_+]=\int_0^{+\infty} x^2 f_X(x)dx-(\int_0^{+\infty} xf_X(x)dx)^2.$$

Мы видим, как преобразовались выражения и ожидаемого значения, и дисперсии при переходе от моделирования величины потерь как случайной величины X, к ее моделированию в виде случайной величины X_+. В частности, мы понимаем, что при оценке риска в виде дисперсии величины потерь оценка риска при переходе представления потерь в виде величины X к их представлению в виде величины X_+ может довольно сильно изменяться.

2. В других случаях интерес сводится к замене в исследовании функции распределения случайной величины X $F_X(x)$ на ее функцию условного распределения при условии реализации события реальной потери, т.е. $X \geqslant 0$ (о понятии функции условного распределения, см., например, [1]), которую мы будем обозначать $F_X^+(x)$, где $F_X^+(x)=\Pr[X<x \mid X\geq 0]$.

Интуитивно очевидно, что данная функция условного распределения величины X будет отличаться от функции распределения случайной величины X, $F_X(x)$. Попытаемся получить выражения для $F_X^+(x)$ функции через $F_X(x)$.

Пусть $x>0$, тогда очевидно, что $F_X^+(x)=\dfrac{P[0\leq X<x]}{P[X\geq 0]}=\dfrac{P[0\leq X<x]}{1-P[X<0]}$.

Используя определение функции распределения, получаем: $F_X^+(x)=\dfrac{F_X(x)-F_X(0)}{1-F_X(0)}$ при $x>0$.

Учитывая, что при всех $x\leq 0$, $F_X^+(x)=0$, получаем окончательное выражение функции условного распределения $F_X^+(x)$ через функцию распределения случайной величины X:

$$F_X^+(x)=\begin{cases}\dfrac{F_X(x)-F_X(0)}{1-F_X(0)}, \text{если } x>0\\ 0, \text{если } x\leq 0.\end{cases} \tag{3}$$

Мы видим, как преобразовалась функция распределения при переходе от функции безусловного распределения величины потерь $F_X(x)$ к ее моделированию в виде данной функции условного распределения.

Соответственно, если обозначить через $f_X^+(x)$ плотность условного распределения величины X при условии $X \geqslant 0$, то так как $f_X^+(x)=(F_X^+)'(x)$, получаем: $f_X^+(x)=\begin{cases}\dfrac{f_X(x)}{1-F_X(0)}, \text{если } x>0\\ 0, \text{если } x\leq 0.\end{cases}$ (4)

Мы видим, как преобразовалась плотность распределения при переходе от функции безусловного распределения величины потерь $F_X(x)$ к ее моделированию в виде данной функции условного распределения.

Из полученных выражений, очевидно, следуют выражения для расчета соответствующих условного ожидаемого значения и условной дисперсии случайной величины X:

$$E^+[X]=\frac{1}{1-F(0)}\int_0^{+\infty} xf_X(x)dx,$$

$$D^{+}[X]=\frac{1}{1-F(0)}\int_{0}^{+\infty}x^{2}f_{X}(x)dx-\frac{1}{(1-F(0))^{2}}(\int_{0}^{+\infty}xf_{X}(x)dx)^{2}.$$

Мы видим, как преобразовались выражения и ожидаемого значения, и дисперсии при переходе от моделирования величины потерь в обеих случаях. В частности, мы понимаем, что при оценке риска в виде дисперсии величины потерь оценка риска при переходе представления потерь в виде величины X к их представлению в обоих рассматриваемых видах может довольно сильно изменяться.

МЕРЫ РИСКА VaR И $VaR^{(t)}$ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИХ ОЦЕНОК ПРИ ПЕРЕХОДЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОТЕРЬ В ВИДЕ ВЕЛИЧИНЫ *X* К ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ В ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ВАРИАНТАХ

Ценность под риском (*VaR*) является одной из наиболее часто применяемых в риск-менеджменте и актуарной науке мер риска (см., например [3–5]).

1. Рассмотрим сначала, как преобразуется данная мера риска при переходе от случайной величины потерь X к случайной величине X_{+}, предполагающей, что потери X неотрицательны ($X \geq 0$). Попытаемся разобраться во взаимосвязи данных оценок.

Заметим, что, согласно определению меры риска *VaR* для величины X с доверительной вероятностью p, $VaR[X,p]$, справедливо соотношение:

$$VaR[X,p]=F_{X}^{-1}(p),\ \ p\in(0,1].$$

Соответственно, для меры риска *VaR* при оценке риска, моделированного случайной величиной X_{+}, $VaR[X_{+},p]$, справедливо соотношение:

$$VaR[X_{+},p]=F_{X_{+}}^{-1}(p),\ \ p\in(0,1].$$

Однако, согласно формуле (1), при $x>0$ $F_{X_{+}}(x)=F_{X}(x)$ для определения $VaR_{p}(X_{+})$ необходимо для любого $p\in(0,1]$ решить уравнение $F_{X}(x)=p$, и, значит, при $p\in(0,1]$, которые могут представить интерес, мы получаем $VaR[X_{+},p]=VaR[X,p]$.

Таким образом, при оценке меры риска *VaR* для величины потерь для любых положительных доверительных вероятностей не происходит никакого преобразования оценки риска при переходе от случайной величины X к величине X_{+}.

В работах [6] и [7] было изучено семейство катастрофических мер риска «*VaR* в степени *t*», $VaR^{(t)}[X,p]$, которые оказались подмножеством хорошо изученных мер риска искажения ожидания рассматриваемых в большом количестве работ (см. [8–13]).

Для семейства мер риска *VaR* в «степени» $t\geq 1$ $VaR^{(t)}[X,p]$, как доказано в работе [6], когда величина «степени» $t\geq 1$ является произвольным вещественным числом, которое представляется в виде $t=m+\alpha$, где m — его целая часть, а α — его дробная часть ($0\leq\ \alpha<1$), справедлива формула $VaR^{(t)}[X,p]=VaR[X,1-(1-p)^{m}(1-\alpha p)]$.

Отсюда и для семейства мер риска *VaR* в «степени» $t\geq 1$ справедлива формула $VaR^{(t)}[X_{+},p]=VaR^{(t)}[X,p]$.

То есть переход моделирования потерь в виде случайной величины X_{+} вместо X — достаточно безобидная операция, если вы оцениваете риски с помощью мер риска $VaR^{(t)}[X,p]$.

Отсюда ясно, что и на все другие квантильные меры риска, в том числе и *ES* и $ES^{(t)}$ (см. [7]), данная трансформация не будет влиять.

Поэтому далее сосредоточимся лишь на случае второго варианта рассмотрения преобразования рисков при сосредоточении на событиях реальных потерь, т.е. $X\geq 0$.

2. В этом случае в исследовании происходит замена функции распределения случайной величины X, $F_{X}(x)$ на ее функцию условного распределения при условии реализации события реальной потери, т.е. $X\geq 0$, $F_{X}^{+}(x)$.

При этом, согласно формуле (3), при $x>0$ $F_{X}^{+}(x)=\dfrac{F_{X}(x)-F_{X}(0)}{1-F_{X}(0)}$.

Естественно ввести следующее определение меры условной ценности под риском, которую мы будем обозначать $VaR^{+}[X,p]$ как решения следующего уравнения: $F_{X}^{+}(x)=p$.

Значит, для определения $VaR^{+}[X,p]$ необходимо для любого $p\in(0,1]$ решить уравнение $\frac{F_X(x)-F_X(0)}{1-F_X(0)}=p$, которое эквивалентно уравнению $F_X(x)=(1-F_X(0))p+F_X(0)$, решение которого представляется в виде: $x=(F_X^{+})^{-1}=F_X^{-1}((1-F_X(0))p+F_X(0))$, из чего получаем следующее важное представление:

$$VaR^{+}[X,p]=VaR[X,(1-F_X(0))p+F_X(0)]. \tag{5}$$

Таким образом, для оценки меры риска условной *VaR*, для величины потерь, при условии их реализации ($X \geqslant 0$) с доверительной вероятностью *p*, достаточно оценить меру риска *VaR* для величины потерь, представляемых случайной величиной *X* с доверительной вероятностью $(1-F_X(0))p+F_X(0)$.

Замечание. Из формулы (5) следует, что при любом $p\in(0,1]$ справедливо неравенство:

$VaR^{+}[X,p]\geq VaR[X,p]$, что следует из очевидно справедливого неравенства $(1-F_X(0))p+F_X(0)\geq p$.

Теперь перейдем к изучению того, как преобразуются оценки рисков, представляемых случайной величиной, измеряемых катастрофическими мерами риска $VaR^{(t)}[X,p]$, при переходе к соответствующим условным мерам риска $VaR^{(t)}[X,p]$ при условии $X \geqslant 0$, которые мы будем обозначать $VaR^{(t)+}[X,p]$.

Начнем со случая, когда величина «степени» *t* в $VaR^{(t)}[X,p]$ является натуральным числом: $t=n$.

Заметим, что в этом случае, как доказано в работе [6], справедлива формула

$$VaR^{(n)}[X,p]=VaR[X,1-(1-p)^{n}], \tag{6}$$

которая сводит вычисление меры риска *VaR* в степени *n* с доверительной вероятностью *p* к вычислению обычной меры риска *VaR* с видоизмененной доверительной вероятностью $1-(1-p)^{n}$.

Тогда, воспользовавшись формулами (6) и (5), получаем:

$$VaR^{(n)+}[X,p]=VaR^{+}[X,1-(1-p)^{n}]=$$

$$=VaR[X,(1-F_X(0))(1-(1-p)^{n})+F_X(0)],$$

или

$$VaR^{(n)+}[X,p]=$$

$$=VaR[X,(1-F_X(0))(1-(1-p)^{n})+F_X(0)]. \tag{7}$$

Таким образом, для оценки условной меры риска *VaR* в степени *n*, для величины потерь, представляемых случайной величиной *X* при условии $X \geqslant 0$ с доверительной вероятностью *p*, достаточно оценить меру риска *VaR* для величины потерь, представляемых случайной величиной *X* с доверительной вероятностью $(1-F_X(0))(1-(1-p)^{n})+F_X(0)$.

Замечание. Из формул (6) и (7) следует, что при любом $p\in(0,1]$ справедливо неравенство:

$VaR^{(n)+}[X,p]\geq VaR^{(n)}[X,p]$, что следует из очевидно справедливого неравенства $(1-F_X(0))(1-(1-p)^{n})+F_X(0)\geq(1-(1-p)^{n}$.

Представляет значительный интерес соотношение между мерами риска $VaR^{(n)}[X,p]$ и $VaR^{(n-1)+}[X,p]$. В частности, какая мера риска дает большую оценку риска: $VaR^{(2)}[X,p]$ — или $VaR[X_{+},p]$?

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение

Для значений доверительных вероятностей $p>F_X(0)$, $VaR^{(n)}[X,p]\geq VaR^{(n-1)+}[X,p]$.

Для значений доверительных вероятностей $p<F_X(0)$, $VaR^{(n)}[X,p]\leq VaR^{(n-1)+}[X,p]$.

При доверительной вероятности $p = F_X(0)$, $VaR^{(n)}[X,p] = VaR^{(n-1)+}[X,p]$.

Доказательство

Так как, согласно работе [6], $VaR^{(n)}[X,p] = VaR[X,1-(1-p)^n]$, а согласно формуле (7), $VaR^{(n-1)+}[X,p] = VaR[X,(1-F_X(0))(1-(1-p)^{n-1})+F_X(0)]$, то достаточно сравнить величины $1-(1-p)^n$ и $(1-F_X(0))(1-(1-p)^{n-1})+F_X(0)$. Рассматривая их разность, получаем выражение: $1-(1-p)^n - (1-F_X(0))(1-(1-p)^{n-1})+F_X(0) = (1-F_X(0))(1-p)^{n-1}-(1-p)^n = (1-p)^{n-1}(p-F_X(0))$, которое, очевидно, не отрицательно при $p > F_X(0)$, не положительно при $p < F_X(0)$ и равно нулю при $p = F_X(0)$.

Утверждение доказано.

Следствие

Для значений доверительных вероятностей $p > F_X(x)$, $VaR^{(2)}[X,p] \geq VaR^{+}[X,p]$.

Для значений доверительных вероятностей $p < F_X(x)$, $VaR^{(2)}[X,p] \leq VaR^{+}[X,p]$.

При доверительной вероятности $p = F_X(x)$, $VaR^{(2)}[X,p] = VaR^{+}[X,p]$.

Для случая, когда величина «степени» $t \geq 1$ в $VaR^{(t)}[X,p]$ является произвольным вещественным числом, которое представляется в виде $t = m + \alpha$, где m — его целая часть, а α — его дробная часть ($0 \leq \alpha < 1$), как доказано в работе [6], справедлива формула $VaR^{(t)}[X,p] = VaR[X,1-(1-p)^m(1-\alpha p)]$, (8)
которая сводит вычисление меры риска *VaR* в степени *t* с доверительной вероятностью *p*, к вычислению обычной меры риска *VaR* с видоизмененной доверительной вероятностью $1-(1-p)^m(1-\alpha p)$.

Тогда, воспользовавшись формулами (8) и (5), получаем: $VaR^{(t)+}[X,p] = VaR^{+}[X,1-(1-p)^m(1-\alpha p)] = VaR[X,(1-F_X(0))(1-(1-p)^m(1-\alpha p)) + F_X(0)]$,
или

$$VaR^{(t)+}[X,p] = VaR[X,(1-F_X(0))(1-(1-p)^m(1-\alpha p))+F_X(0)]. \quad (9)$$

Таким образом, для оценки условной меры риска *VaR* в степени *t* для величины потерь, представляемых случайной величиной *X* при условии $X \geqslant 0$ с доверительной вероятностью *p*, достаточно оценить меру риска *VaR* для величины потерь, представляемых случайной величиной *X* с доверительной вероятностью $(1-F_X(0))(1-(1-p)^m(1-\alpha p))+F_X(0)]$.

Замечание. Из формул (8) и (9) следует, что при любом $p \in (0,1]$ справедливо неравенство: $VaR^{(t)}[X_+,p] \geq VaR^{(t)}[X,p]$ что следует из очевидно справедливого неравенства $(1-F_X(0))(1-(1-p)^m(1-\alpha p))+F_X(0) \geq (1-(1-p)^m(1-\alpha p)$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕР РИСКА VaR И $VaR^{(t)}$ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К VaR^{+} И $VaR^{+(t)}$ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОТЕРЬ

Перейдем к рассмотрению формул преобразования мер риска VaR и $VaR^{(t)}$ при переходе представления потерь в виде величины *X* к мерам риска VaR^{+} и $VaR^{+(t)}$ для некоторых часто применяемых классических распределений потерь.

Равномерное распределение величины потерь *X* на интервале $[a,b]$ характеризуется функцией распределения $F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{если } a \leq x \leq b. \\ 1, \text{если } x > b \end{cases}$

Множество равномерно распределенных на интервале $[a,b]$ величин часто обозначается $Uni[a,b]$.

Как известно (см., например, [14, 15]), если $X \in Uni[a,b]$, то справедлива формула $VaR[X,p] = pb+(1-p)a$.

Мы предполагаем в данном случае, что $a < 0$, а $b > 0$, чтобы переход от *X* к X_+ был не тривиален.

Применяя в данном случае формулу (5), получаем, что $VaR^{+}[X,p] = [(1-F_X(0))p+F_X(0)]b + [1-(1-F_X(0))p-F_X(0)]a$.

Заметим, что в наших предположениях $F_X(0) = -\dfrac{a}{b-a}$, поэтому $VaR^{+}[X,p] = [\dfrac{b}{b-a}p - \dfrac{a}{b-a}]b + [\dfrac{b}{b-a} - \dfrac{b}{b-a}p]a = \dfrac{b^2}{b-a}p - \dfrac{ab}{b-a}p = \dfrac{b(b-a)}{b-a}p = bp.$

То есть $VaR^{+}[X,p] = bp$.

Перейдем к получению формулы преобразования меры риска $VaR^{(n)}[X,p]$ при $X \in Uni[a,b]$. Используя формулу (7) и выражение для $VaR[X,p]$, получаем

$$VaR^{(n)+}[X,p] = [(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0)]b +$$

$$+ [1-(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)-F_X(0)]a =$$

$$= [(1+\frac{a}{b-a})(1-(1-p)^n)-\frac{a}{b-a}]b + [1+\frac{a}{b-a}-(1+\frac{a}{b-a})(1-(1-p)^n)]a =$$

$$= [\frac{b}{b-a}(1-(1-p)^n)-\frac{a}{b-a}]b + [\frac{b}{b-a}(1-(1-(1-p)^n))a.$$

Из данной формулы видно, что при $p \to 1$, $VaR^{(n)+}[X,p]$ с большой скоростью стремится к *b*, причем скорость стремления возрастает при росте степени *n*.

Соответственно, формула для $VaR^{(t)+}[X,p]$ при произвольном действительном значении $t \geq 1, t = m+\alpha$ приобретает вид:

$$VaR^{(t)+}[X,p] = [\frac{b}{b-a}(1-(1-p)^m(1-\alpha p))-\frac{a}{b-a}]b + [\frac{b}{b-a}(1-(1-(1-p)^m(1-.\alpha p)))a.$$

Смещенное показательное распределение величины потерь *X* с параметрами *r* и *a*, где $r > 0, a \in R$ характеризуется функцией распределения $F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-r(x-a)}, \text{ если } x \geq a \\ 0, \text{ если } x < a \end{cases}$.

Множество случайных величин, распределенных на интервале $[a,+\infty)$ согласно данному закону, часто обозначается $Exp(r,a)$.

Несложно доказать, что если $X \in Exp(r,a)$, то справедлива формула (см. *Приложение 1*) $VaR[X,p] = a - \ln(1-p)/r$.

Применяя в данном случае формулу (5), получаем, что $VaR^{+}[X,p] = a - \ln(1-(1-F_X(0))p - F_X(0))/r$.

Заметим, что в нашем случае $F_X(0) = \begin{cases} 1-e^{ra}, \text{ если } a \leq 0 \\ 0, \text{ если } a > 0 \end{cases}$, поэтому:

1) если величина сноса $a \leq 0$, то получаем

$$VaR^{+}[X,p] = a - \frac{\ln(1-e^{ra}p-1+e^{ra})}{r} = a - \frac{ra+\ln(1-p)}{r} = -\frac{\ln(1-p)}{r},$$

т.е. $VaR^{+}[X,p] = -\frac{\ln(1-p)}{r}$, т.е. в процессе преобразования оценка *VaR* увеличилась на величину, равную $-a \geq 0$, и стала равной случаю, когда сноса нет;

2) если величина сноса $a > 0$, то получаем $VaR^{+}[X,p] = VaR[X,p] = a - \frac{\ln(1-p)}{r}$, т.е. в этом случае преобразование случайной величины не меняет величину меры риска *VaR*, что соответствует интуитивному представлению ситуации.

Таким образом мы получили следующую формулу:

$$VaR^{+}[X,p] = \begin{cases} a - \frac{\ln(1-p)}{r}, \text{ если } a > 0 \\ -\frac{\ln(1-p)}{r}, \text{ если } a \leq 0. \end{cases}$$

Перейдем к получению формулы преобразования меры риска $VaR^{(n)}[X,p]$ для $X \in Exp(r,a)$. Используя формулу (7) и выражение для $VaR[X,p]$, получаем:

1. Если величина сноса $\alpha \le 0$, то получаем

$$VaR^{(n)+}[X,p] = a - \frac{\ln(1-[(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0)])}{r} =$$

$$= a - \frac{\ln(1-[e^{ra}(1-(1-p)^n)+1-e^{ra}])}{r} = a - \frac{\ln(e^{ra}(1-p)^n)}{r} = -\frac{n\ln(1-p)}{r}.$$

2. Если величина сноса $a > 0$, то получаем

$$VaR^{(n)+}[X,p] = a - \frac{\ln(1-[(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0)])}{r} = a - \frac{\ln((1-p)^n)}{r} = = a - \frac{n\ln(1-p)}{r}.$$

Таким образом мы получили следующую формулу:

$$VaR^{(n)+}[X,p] = \begin{cases} a - \dfrac{n\ln(1-p)}{r}, \text{ если } a > 0 \\ -\dfrac{n\ln(1-p)}{r}, \text{ если } a \le 0. \end{cases}$$

Из данной формулы видно, что при $p \to 1$, $VaR^{(n)+}[X,p]$ линейно по n стремится к $+\infty$.

Соответственно, формула для $VaR^{(t)+}[X,p]$ при произвольном действительном значении $t \ge 1, t = m + \alpha$ приобретает вид:

$$VaR^{(t)+}[X,p] = \begin{cases} a - \dfrac{\ln(1-p)^m(1-\alpha p)}{r}, \text{ если } a > 0 \\ -\dfrac{\ln(1-p)^m(1-\alpha p)}{r}, \text{ если } a \le 0. \end{cases}$$

Треугольное распределение величины потерь X с вершинами основания треугольника в точках a,b и модой k, где $a,b,k \in R$ и $a \le k \le b$ характеризуется функцией распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(k-a)}, \text{ если } a < x \le k \\ 1 - \dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-k)}, \text{ если } k < x \le b \\ 1, \text{ если } x > b. \end{cases}$$

Множество треугольно распределенных на интервале $[a,b]$ величин будем обозначать $Tr(a,b,k)$.

Как известно (см. [14]), если величина потерь представляется случайной величиной $X \in Tr(a,b,k)$, то справедлива формула

$$VaR[X,p] = \begin{cases} b - \sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)}, \text{если } k \le a(1-p)+bp \\ a + \sqrt{p(b-a)(k-a)}, \text{если } k > a(1-p)+bp. \end{cases}$$

Применяя в данном случае формулу (5), получаем, что

$$VaR^{+}[X,p] = \begin{cases} b - \sqrt{[1-((1-F_X(0))p+F_X(0))](b-a)(b-k)}, \\ \text{если } k \le a(1-((1-F_X(0))p+F_X(0)))+b((1-F_X(0))p+F_X(0)) \\ a + \sqrt{((1-F_X(0))p+F_X(0))(b-a)(k-a)}, \\ \text{если } k > a(1-((1-F_X(0))p+F_X(0))+b((1-F_X(0))p+F_X(0)). \end{cases}$$

Заметим, что в нашем случае $F_X(0)=\begin{cases}0, \text{если } a\ge 0\\ \dfrac{a^2}{(b-a)(k-a)}, \text{ если } a<0\le k\\ 1-\dfrac{b^2}{(b-a)(b-\nu)}, \text{ если } k<0\le b\\ 1, \text{ если } b<0,\end{cases}$
поэтому:

1) если $a\ge 0$, то получаем

$$VaR^{+}[X,p]=\begin{cases}b-\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)}, \text{если } k\le a(1-p)+bp\\ a+\sqrt{p(b-a)(k-a)}, \text{если } k>a(1-p)+bp,\end{cases}$$

т.е. в этом случае $VaR^{+}[X,p]=VaR[X,p]$, что соответствует нашему интуитивному представлению процесса преобразования;

2) если $a<0\le k$, то получаем

$$VaR^{+}[X,p]=\begin{cases}b-\sqrt{[1-((1-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})p+\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})](b-a)(b-k)},\\ \text{если } k\le a(1-((1-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})p+\frac{a^2}{(b-a)(k-a)}))+\\ +b((1-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})p+\frac{a^2}{(b-a)(k-a)});\\ a+\sqrt{((1-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})p+\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})(b-a)(k-a)},\\ \text{если } k>a(1-((1-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})p+\frac{a^2}{(b-a)(k-a)}))+\\ +b((1-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})p+\frac{a^2}{(b-a)(k-a)}));\end{cases}$$

3) если $k<0\le b$, то получаем

$$VaR^{+}[X,p]=\begin{cases}b-\sqrt{[\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}-\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}p](b-a)(b-k)},\\ \text{если } k\le a(\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}-\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}p)+\\ +b(\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}p+1-\frac{b^2}{(b-a)(b-k)})\\ a+\sqrt{(\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}p+1-\frac{b^2}{(b-a)(b-k)})(b-a)(k-a)},\\ \text{если } k>a(\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}-\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}p)+\\ +b(\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}p+1-\frac{b^2}{(b-a)(b-k)})\end{cases}$$

или
$$VaR^{+}[X,p]=\begin{cases} b-b\sqrt{1-p}, \\ \text{если}\, k\le a\dfrac{b^2(1-p)}{(b-a)(b-k)}+ \\ +b(1-\dfrac{b^2(1-p)}{(b-a)(b-k)}) \\ a+\sqrt{(1-\dfrac{b^2(1-p)}{(b-a)(b-k)})(b-a)(k-a)}, \\ \text{если}\, k>a\dfrac{b^2(1-p)}{(b-a)(b-k)}+ \\ +b(1-\dfrac{b^2(1-p)}{(b-a)(b-k)}); \end{cases}$$

4) если $b<0$, то получаем $VaR^{+}[X,p]=b$,
т.е. в этом случае с любой доверительной вероятностью положительных значений рисков (потерь) не возникает.

Формулы преобразования мер риска $VaR^{(n)}[X,p]$ и $VaR^{(t)}[X,p]$ для $X\in Tr(a,b,k)$ при переходе от случайной величины X к величине X_{+} несложно записать с использованием формул (7) и (9) выражений для $VaR^{(n)}[X,p]$ и $VaR^{(t)}[X,p]$ для треугольного распределения приведенных в [6]. Из-за их громоздкости мы здесь их не приводим.

Нормальное распределение величины потерь X с параметрами a и s (a — величина ожидаемых потерь, σ — стандартное отклонение потерь), где $s>0$, $a\in R$ характеризуется функцией распределения

$$F_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{(t-a)^2}{2s^2})dt .$$

Множество случайных величин, распределенных на интервале $(-\infty,+\infty)$, согласно данному закону, часто обозначается $Nor(a,s)$.

Как известно (см., например, [8]), если $X\in Nor(a,s)$, то справедлива формула $VaR[X,p]=a+k_p s$, где k_p — квантиль стандартного нормального распределения (с параметрами $a=0$ и $s=1$).

Применяя в данном случае формулу (5), получаем, что

$$VaR^{+}[X,p]=VaR[X,(1-F_X(0))p+F_X(0)],$$
$$VaR^{+}[X,p]=a+k_{(1-F_X(0))p+F_X(0)}s .$$

Заметим, что в нашем случае $F_X(0)=\dfrac{1}{2}$, поэтому $VaR^{+}[X,p]=a+k_{0,5p+0,5}s$.

Перейдем к получению формулы преобразования меры риска $VaR^{(n)}[X,p]$ для $X\in Nor(a,s)$.

Используя формулу (7) и выражение для $VaR[X,p]$, получаем:

$$VaR^{(n)+}[X,p]=a+k_{0,5(1-(1-p)^n)+0,5}s .$$

Из данной формулы видно, что при $p\to 1$ $VaR^{(n)+}[X,p]$ стремится к $+\infty$ со скоростью, возрастающей с ростом n.

Соответственно, формула для $VaR^{(t)+}[X,p]$ при произвольном действительном значении $t\ge 1, t=m+\alpha$ приобретает вид:

$$VaR^{(t)+}[X,p]=a+k_{0,5(1-(1-p)^m(1-\alpha p))+0,5}s .$$

МЕРЫ РИСКА ES И $ES^{(t)}$ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИХ ОЦЕНОК ПРИ ПЕРЕХОДЕ К МЕРАМ РИСКА ES^{+} И $ES^{(t)+}$

Меры риска искажения ожидания часто используются для расчета экономического капитала. Одной из часто применяемых мер риска искажения является мера ожидаемого дефицита *ES*. Например, Базельский комитет по банковскому надзору устанавливает меру риска *ES* при доверительной вероятности 97,5% для расчета минимальных требований к капиталу [16].

При этом эту меру применяют как для оценки рисков, связанных со случайной величиной потерь *X*, так и в предположении, что потери *X* неотрицательны ($X \geq 0$).

Естественно ввести следующее определение условной меры риска, при условии $X \geq 0$ ожидаемого дефицита с заданной доверительной вероятностью *p*, следующим образом:

$$ES^{+}[X,p] = E[X \mid X > VaR^{+}[X,p]] = E[X \mid X > (F_X^{+})^{-1}(p)],$$

где через $E[X \mid A]$, обозначается условное ожидание случайной величины *X* при условии исполнения события *A*.

Мы попытаемся разобраться во взаимосвязи мер риска $ES[X,p]$ и $ES^{+}[X,p]$.

Заметим, что, согласно определению меры риска *ES* для величины *X* с доверительной вероятностью *p*, $ES[X,p]$, справедливо соотношение:

$$ES[X,p] = E[X \mid X > VaR[X,p]] = E[X \mid X > F_X^{-1}(p)], \; p \in (0,1]. \tag{10}$$

Из последнего соотношения и определения $VaR[X,p]$ следует выражение

$$ES[X,p] = \frac{1}{1-p} \int_{F_X^{-1}(p)}^{+\infty} x f_X(x)dx, \tag{11}$$

из которого можно получить (см., например, [8]) известную формулу:

$$ES[X,p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 F_X^{-1}(q)dq = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X,q]dq. \tag{12}$$

Соответственно, для меры риска $ES^{+}[X,p]$ справедливо соотношение:

$$ES^{+}[X,p] = E[X \mid X > VaR^{+}[X,p]] = E[X \mid X > (F_X^{+})^{-1}(p)], \; p \in (0,1]. \tag{13}$$

Или с использованием формулы (5) для $VaR^{+}[X,p]$ получаем

$$ES^{+}[X,p] = E[X \mid X > VaR[X,(1-F_X(0))p + F_X(0)]] =$$
$$= E[X \mid X > F_X^{-1}((1-F_X(0))p) + F_X(0)].$$

Тогда аналогично формуле (11) получаем:

$$ES^{+}[X,p] = \frac{1}{1-((1-F_X(0))p + F_X(0))} \int_{F_X^{-1}((1-F_X(0))p + F_X(0))}^{+\infty} x f_X(x)dx. \tag{14}$$

Совершим в последнем интеграле следующую замену переменной:

$$x = F_X^{-1}((1-F_X(0))q + F_X(0)).$$

Заметим, что при $q = p$ $x = F_X^{-1}((1-F_X(0))p + F_X(0)$, а при $q = 1$ $x = F_X^{-1}(1) = +\infty$.
Из теоремы о производной обратной функции следует, что

$$dx = \frac{1}{F_X'(F_X^{-1}((1-F_X(0))q + F_X(0)))}(1-F_X(0))dq = \frac{1}{f_X(F_X^{-1}((1-F_X(0))q + F_X(0)))}(1-F_X(0))dq.$$

Поэтому из (14) следует

$$ES^{+}[X,p]=\frac{1}{1-((1-F_X(0))p+F_X(0))}\times$$
$$\times\int_p^1 F_X^{-1}((1-F_X(0))q+F_X(0))f_X(F_X^{-1}((1-F_X(0))q+F_X(0)))\frac{1-F_X(0)}{f_X(F_X^{-1}((1-F_X(0))q+F_X(0)))}dq=$$
$$=\frac{1-F_X(0)}{1-((1-F_X(0))p+F_X(0))}\int_p^1 F_X^{-1}((1-F_X(0))q+F_X(0))dq. \quad (15)$$

Совершим еще одну замену переменной в последнем интеграле: $r=(1-F_X(0))q+F_X(0)$.

Заметим, что при $q=p$, $r=(1-F_X(0))p+F_X(0)$, а при $q=1$ $r=1$ и $dr=(1-F_X(0))dq$, а значит, $dq=\frac{1}{1-F_X(0)}dr$.

Поэтому из (15) получаем

$$ES^{+}[X,p]=\frac{1}{1-((1-F_X(0))p+F_X(0))}\int_{(1-F_X(0))p+F_X(0)}^{1} F_X^{-1}(r)dr,$$

из чего, согласно формуле (12), и получаем следующее важное представление:

$$ES^{+}[X,p]=ES[X,(1-F_X(0))p+F_X(0)]. \quad (16)$$

Таким образом, для оценки условной меры риска *ES* для величины потерь, представляемых случайной величиной *X*, при условии $X\geq 0$, с доверительной вероятностью *p*, достаточно оценить меру риска *ES* для величины потерь, представляемых случайной величиной *X* с доверительной вероятностью $(1-F_X(0))p+F_X(0)$.

Замечание. Очевидно, что при любом $p\in(0,1]$ справедливо неравенство:

$$ES[X_+,p]\geq ES[X,p].$$

В работах [6] и [7] было изучено семейство катастрофических мер риска «*ES* в степени *t*», $ES^{(t)}[X,p]$, которые оказались подмножеством хорошо изученных мер риска, рассматриваемом в большом количестве работ (см. [8–13]) мер риска искажения ожидания.

Теперь перейдем к изучению того, как оценки рисков, измеряемых катастрофическими условными мерами риска $ES^{(t)+}[X,p]$, связаны с мерами риска $ES^{(t)}[X,p]$.

Начнем со случая, когда величина «степени» *t* в $ES^{(t)}[X,p]$ является натуральным числом: $t=n$.

Заметим, что в этом случае, как доказано в работе [6], справедлива формула

$$ES^{(n)}[X,p]=ES[X,1-(1-p)^n], \quad (17)$$

которая сводит вычисление меры риска *ES* в степени *n* с доверительной вероятностью *p* к вычислению обычной меры риска *ES* с видоизмененной доверительной вероятностью $1-(1-p)^n$.

Тогда, воспользовавшись формулами (17) и (16), примененными к случайной величине X_+, получаем

$$ES^{(n)+}[X,p]=ES^{+}[X,1-(1-p)^n]=ES[X,(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0)],$$

или

$$ES^{(n)+}[X,p]=ES[X,(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0)]. \quad (18)$$

Таким образом, для оценки условной меры риска *ES* в степени *n*, в предположении, что величина потерь принимает лишь неотрицательные значения $X \geq 0$, с доверительной вероятностью *p* достаточно оценить меру риска *ES* для величины потерь, представляемых случайной величиной *X* с доверительной вероятностью $(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0)$.

Замечание. Из формул (17) и (18) следует, что при любом $p \in (0,1]$ справедливо неравенство: $ES^{(n)+}[X,p] \geq ES^{(n)}[X,p]$.

Представляет значительный интерес соотношение между мерами риска $ES^{(n)}[X,p]$ и $ES^{(n-1)+}[X,p]$. В частности, какая мера риска дает большую оценку риска $ES^{(2)}[X,p]$ или $ES[X_+,p]$?

Оказывается, что справедливо следующее утверждение:

Утверждение

1. Если $p > F_X(0)$, то $ES^{(n)+}[X,p] \leq ES^{(n+1)}[X,p]$.
2. Если $p < F_X(0)$, то $ES^{(n)+}[X,p] \geq ES^{(n+1)}[X,p]$.
3. Если $p = F_X(0)$, то $ES^{(n)+}[X,p] = ES^{(n)}[X,p]$.

Доказательство

Вспомним, что, согласно формуле (18),

$$ES^{(n)+}[X,p] = ES[X,(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0)],$$

при этом

$$ES^{(n+1)}[X,p] = ES[X,1-(1-p)^{n+1}].$$

1. При $p > F_X(0)$, $1-p < 1-F_X(0)$, т.е. $(1-p)^{n+1} < (1-p)^n(1-F_X(0))$, а, значит, $1-F_X(0)-(1-p)^n(1-F_X(0))+F_X(0) < 1-(1-p)^{n+1}$,

т.е.

$$(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0) < 1-(1-p)^{n+1}.$$

Поэтому $ES^{(n)+}[X,p] \leq ES^{(n+1)}[X,p]$.

2. При $p < F_X(0)$, $1-p > 1-F_X(0)$, т.е. $(1-p)^{n+1} > (1-p)^n(1-F_X(0))$, а, значит, $1-F_X(0)-(1-p)^n(1-F_X(0))+F_X(0) > 1-(1-p)^{n+1}$,

т.е.

$$(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0) > 1-(1-p)^{n+1}.$$

Поэтому $ES^{(n)+}[X,p] \geq ES^{(n+1)}[X,p]$.

3. При $p = F_X(0)$

$$(1-F_X(0))(1-(1-p)^n)+F_X(0) = (1-p)(1-(1-p)^n)+p = 1-(1-p)^{n+1}.$$

Поэтому $ES^{(n)+}[X,p] = ES^{(n+1)}[X,p]$.

Тогда, справедливо следствие:

Следствие

1. Если $p > F_X(0)$, то $ES^{+}[X,p] \leq ES^{(2)}[X,p]$.
2. Если $p < F_X(0)$, то $ES^{+}[X,p] \geq ES^{(2)}[X,p]$.
3. Если $p = F_X(0)$, то $ES^{+}[X,p] = ES^{(2)}[X,p]$.

Как известно (см. [15]), не зная закона распределения величины потерь, нельзя сказать, какая из величин рисков $ES[X,p]$ или $VaR^{(2)}[X,p]$ больше.

Кроме того, как доказано в работе [17], мера $ES[X,p]$ мажорируется определенной смесью мер риска $VaR^{(2)}[X,p]ES^{(2)}[X,p]$, а именно, справедливо неравенство $ES[X,p] \leq pVaR^{(2)}[X,p]+(1-p)ES^{(2)}[X,p]$ для любой доверительной вероятности *p*, т.е. значение меры риска $ES[X,p]$ не превышает взвешенной по вероятностям *p* и 1 — *p* суммы мер риска $VaR^{(2)}[X,p]$ и $ES^{(2)}[X,p]$.

Тогда, очевидно, справедлива следующая серия неравенств:

$$ES[X,p] \le ES^{+}[X,p] \le pVaR^{(2)+}[X,p] + (1-p)ES^{(2)+}[X,p],$$

позволяющая с помощью процедуры преобразования, применяя соответствующую смесь мер риска $VaR^{(2)+}[X,p]$ и $ES^{(2)+}[X,p]$, получать более строгие оценки катастрофических рисков.

Для случая, когда величина «степени» $t \ge 1$ в $ES^{(t)}[X,p]$ является произвольным вещественным числом, которое представляется в виде $t = m + \alpha$, где m — его целая часть, а α — его дробная часть ($0 \le \alpha < 1$), как доказано в работе [6], справедлива формула

$$ES^{(t)}[X,p] = ES[X, 1-(1-p)^{m}(1-\alpha p)], \tag{19}$$

которая сводит вычисление меры риска ES в степени t с доверительной вероятностью p к вычислению обычной меры риска ES с видоизмененной доверительной вероятностью $1-(1-p)^{m}(1-\alpha p)\,\alpha p$.

Тогда, воспользовавшись формулами (16) и (19), примененными в данном случае, получаем:

$$ES^{(t)+}[X,p] = ES^{+}[X, 1-(1-p)^{m}(1-\alpha p)] = ES[X, (1-F_X(0))(1-(1-p)^{m}(1-\alpha p)) + F_X(0)],$$

или

$$ES^{(t)+}[X,p] = ES[X, (1-F_X(0))(1-(1-p)^{m}(1-\alpha p)) + F_X(0)]. \tag{20}$$

Таким образом, для оценки условной меры риска ES в степени t для величины потерь, представляемых случайной величиной X, при условии $X \ge 0$, с доверительной вероятностью p, достаточно оценить меру риска ES для величины потерь, представляемых случайной величиной X с доверительной вероятностью $(1-F_X(0))(1-(1-p)^{m}(1-\alpha p)) + F_X(0)$.

Замечание. Из формул (8) и (9) следует, что при любом $p \in (0,1]$ справедливо неравенство $VaR^{(t)+}[X,p] \ge VaR^{(t)}[X,p]$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕР РИСКА ES И $ES^{(t)}$ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К МЕРАМ РИСКА ES^{+} И $ES^{(t)+}$ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОТЕРЬ

Перейдем к рассмотрению формул преобразования мер риска ES и $ES^{(t)}$ при переходе к соответствующим условным мерам риска при условии $X \ge 0$ для некоторых часто применяемых классических распределений потерь.

Равномерное распределение величины потерь X на интервале $[a,b]$.

Как известно (см., например [15]), если $X \in Uni[a,b]$, то справедлива формула $ES[X,p] = \dfrac{(1-p)a + (1+p)b}{2}$.

Мы предполагаем в данном случае, что $a < 0$, а $b > 0$, чтобы переход был не тривиален.

Применяя в данном случае формулу (16), получаем:

$$ES^{+}[X,p] = \frac{1}{1-F_X(0)} \frac{(1-((1-F_X(0))p + F_X(0)))a + (1+((1+F_X(0))p + F_X(0)))b}{2}.$$

Заметим, что в наших предположениях $F_X(0) = -\dfrac{a}{b-a}$, поэтому

$$(1-F_X(0))p + F_X(0) = (1+\frac{a}{b-a)})p - \frac{a}{b-a} = \frac{b}{b-a}p - \frac{a}{b-a}, \text{ а, значит,}$$

$$ES^{+}[X,p] = \frac{[1-\dfrac{b}{b-a}p + \dfrac{a}{b-a}]a + [1+\dfrac{b}{b-a}p - \dfrac{a}{b-a}]b}{2} = \frac{a(1+\dfrac{a-bp}{b-a}) + b(1-\dfrac{a-bp}{b-a})}{2}.$$

То есть

$$ES^{+}[X,p] = \frac{a(1+\dfrac{a-bp}{b-a}) + b(1-\dfrac{a-bp}{b-a})}{2}.$$

Заметим, что при $p \to 1$ $ES^{+}[X,p] \to b$.

Перейдем к получению соответствующей формулы трансформации меры риска $ES^{(n)}[X,p]$ для $X \in Uni[a,b]$. Используя формулу (19) и выражение для $ES[X,p]$, получаем

$$ES^{(n)+}[X,p] = ES^{+}[X,1-(1-p)^{n}] = [a(1+\frac{a-b(1-(1-p)^{n})}{b-a}) + b(1-\frac{a-b(1-(1-p)^{n})}{b-a})]/2.$$

Соответственно, формула для $ES^{(t)+}[X,p]$ при произвольном действительном значении $t \geq 1, t = m+\alpha$ приобретает вид:

$$ES^{(t)}[X_{+},p] = \frac{1}{2}[a(1+\frac{a-b(1-(1-p)^{m}(1-\alpha p))}{b-a}) + b(1-\frac{a-b(1-(1-p)^{m}(1-\alpha p))}{b-a})].$$

Смещенное показательное распределение величины потерь X с параметрами r и a, где $r>0,\ a \in R$.

Можно доказать, что если $X \in Exp(r,a)$, то справедлива формула (см. *Приложение 2*) $ES[X,p] = a + \frac{1}{r} - \frac{\ln(1-p)}{r}$.

Применяя в данном случае формулу (16), получаем, что

$$ES^{+}[X,p] = a + \frac{1}{r} - \frac{\ln(1-(1-F_X(0))p - F_X(0))}{r}.$$

Заметим, что в нашем случае $F_X(0) = \begin{cases} 1-e^{ra}, \text{ если } a \leq 0 \\ 0, \text{ если } a > 0 \end{cases}$, поэтому:

1) если величина сноса $a \leq 0$, то $(1-F_X(0))p + F_X(0) = e^{ra}p + 1 - e^{ra}$,

и получаем

$$ES^{+}[X,p] = \alpha + \frac{1}{r} - \frac{\ln(e^{ra} - e^{ra}p)}{r} = \alpha + \frac{1}{r} - \frac{ra + \ln(1-p)}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}(1-\ln(1-p)), \text{ т.е. } ES^{+}[X,p] = \frac{1}{r}(1-\ln(1-p));$$

2) если величина сноса $\alpha > 0$, то $(1-F_X(0))p + F_X(0) = p$,

получаем $ES^{+}[X,p] = ES[X,p] = \alpha + \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(1-p)}{\lambda}$, т.е. в этом случае трансформация случайной величины не меняет величину меры
риска ES, что соответствует интуитивному представлению ситуации.

Таким образом мы получили следующую формулу:

$$ES^{+}[X,p] = \begin{cases} a + \frac{1}{r} - \frac{\ln(1-p)}{r}, \text{если } a > 0 \\ \frac{1}{r}(1-\ln(1-p)), \text{если } a \leq 0. \end{cases}$$

Перейдем к получению формулы преобразования меры риска $ES^{(n)}[X,p]$ для $X \in Exp(r,a)$. Используя последнее выражение и формулу для $ES^{(n)}[X,p]$, получаем:

$$ES^{(n)+}[X,p] = \begin{cases} a + \frac{1}{r} - \frac{\ln(1-(1-(1-p)^n)}{r}, \text{если } a > 0 \\ \frac{1}{r}(1 - \ln(1-(1-(1-p)^n)), \text{если } a \le 0, \end{cases}$$

а, значит,

$$ES^{(n)+}[X,p] = \begin{cases} \alpha + \frac{1}{r} - \frac{n\ln(1-p)}{r}, \text{если } a > 0 \\ \frac{1}{r}(1 - n\ln(1-p)), \text{если } a \le 0 \end{cases}$$

Из данной формулы видно, что при $p \to 1$ $ES^{(n)+}[X,p]$ линейно по n стремится к $+\infty$.

Соответственно, формула для $ES^{(t)+}[X,p]$ при произвольном действительном значении $t \ge 1$, $t = m + \alpha$ приобретает вид:

$$ES^{(t)+}[X,p] = \begin{cases} a + \frac{1}{r} - \frac{\ln[(1-p)^m(1-\alpha p)]}{r}, \text{если } a > 0 \\ \frac{1}{r}(1 - \ln[(1-p)^m(1-\alpha p)], \text{если } a \le 0 \end{cases}.$$

Треугольное распределение величины потерь X с вершинами основания треугольника в точках a, b и модой k, где $a, b, k \in R$ и $a \le k \le b$.

Можно доказать, что если $X \in Tr(a,b,k)$, то справедлива формула (см. *Приложение 3*)

$$ES[X,p] = \begin{cases} b - \frac{2}{3}\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)}, \text{если } p \ge \frac{k-a}{b-a} \\ \frac{1}{1-p}[b+a-k+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(k-a)}(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3} - \sqrt{(\frac{b-k}{b-a})^3} - \sqrt{p^3})], \text{ если } p < \frac{k-a}{b-a}. \end{cases}$$

Применяя в данном случае формулу (16), получаем, что

$$ES^{+}[X,p] = \begin{cases} b - \frac{2}{3}\sqrt{(1-((1-F_X(0))p + F_X(0))(b-a)(b-k)}, \\ \text{если } p \ge (\frac{k-a}{b-a} - F_X(0))/(1-F_X(0)) \\ \frac{1}{1-p}[b+a-k+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(k-a)} \times \\ \times(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3} - \sqrt{(\frac{b-k}{b-a})^3} - \sqrt{((1-F_X(0)p + F_X(0))^3})], \\ \text{если } p < (\frac{k-a}{b-a} - F_X(0))/(1-F_X(0)) \end{cases}.$$

Заметим, что в нашем случае $F_X(0) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \ge 0 \\ \frac{a^2}{(b-a)(k-a)}, \text{ если } a < 0 \le k \\ 1 - \frac{b^2}{(b-a)(b-k)}, \text{ если } k < 0 \le b \\ 1, \text{ если } b < 0. \end{cases}$

поэтому:

1) если $a \geq 0$, то

$$ES^{+}[X,p]=\begin{cases} b-\frac{2}{3}\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)}, \text{если } p \geq \frac{k-a}{b-a} \\ \frac{1}{1-p}[b+a-k+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(k-a)}(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3}-\sqrt{(\frac{b-k}{b-a})^3}-\sqrt{p^3})], \text{если } p < \frac{k-a}{b-a}, \end{cases}$$

т.е. в этом случае $ES^{+}[X,p]=ES[X,p]$, что соответствует нашему интуитивному представлению процесса преобразования;

2) если $a < 0 \leq k$, и так как

$$(\frac{k-a}{b-a}-F_X(0))/(1-F_X(0))=(\frac{k-a}{b-a}-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})/(1-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})=$$

$$=\frac{k(k-2a)}{k(b-a)-ab},$$

то получаем

$$ES^{+}[X,p]=\begin{cases} b-\frac{2}{3}\sqrt{[1-((1-\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})p+\frac{a^2}{(b-a)(k-a)})](b-a)(b-k)}, \\ \text{если } p \geq \frac{k(k-a)}{k(b-a)-ab}; \\ \frac{1}{1-p}[b+a-k-ap+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(k-a)}(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3}-\sqrt{(\frac{b-k}{b-a})^3}- \\ -\sqrt{((1-\frac{a^2}{(b-a)(b-k)})p-\frac{a^2}{(b-a)(b-k)})^3})], \\ \text{если } p < \frac{k(k-2a)}{k(b-a)-ab}; \end{cases}$$

3) если $k < 0 \leq b$, то получаем

$$ES^{+}[X,p]=\begin{cases} b-\frac{2}{3}\sqrt{[\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}-\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}p](b-a)(b-k)}, \\ \text{если } p \geq \frac{k(k-2a)}{k(b-a)-ab}; \\ \frac{1}{1-p}[b+a-k+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(k-a)}\times \\ \times(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3}-\sqrt{(\frac{b-k}{b-a})^3}-\sqrt{(\frac{b^2}{(b-a)(b-k)}p+1-\frac{b^2}{(b-a)(b-k)})^3})] \\ \text{если } p < \frac{k(k-2a)}{k(b-a)-ab} \end{cases},$$

или
$$ES^{+}[X,p]=\begin{cases} b-\dfrac{2}{3}b\sqrt{1-p}, \\ \text{если } p\geq\dfrac{k(k-2a)}{k(b-a)-ab}; \\ \dfrac{1}{1-p}[b+a-k+\dfrac{2}{3}\sqrt{(b-a)(k-a)}\times \\ \times(\sqrt{(\dfrac{k-a}{b-a})^{3}}-\sqrt{(\dfrac{b-k}{b-a})^{3}}-\sqrt{(1-\dfrac{b^{2}(1-p)}{(b-a)(b-k)})^{3}})], \\ \text{если } p<\dfrac{k(k-2a)}{k(b-a)-ab}; \end{cases}$$

4) если $b<0$, то получаем

$$ES^{+}[X,p]=b,$$

т.е. в этом случае, с любой доверительной вероятностью положительных значений рисков (потерь) не возникает.

Формулы преобразования мер риска $ES^{(n)}[X,p]$ и $ES^{(t)}[X,p]$ для $X\in Tr(a,b,\nu)$ несложно записать с использованием формул (18) и (20) выражения для $ES[X,p]$ в случае треугольного распределения полученного в *Приложении 3*. Из-за их громоздкости мы здесь их не приводим.

Нормальное распределение величины потерь X с параметрами a и s (a — величина ожидаемых потерь, s — стандартное отклонение потерь), где $s>0$, $a\in R$.

Как известно (см., например, [8]), если $X\in Nor(a,s)$, то справедлива формула $ES[X,p]=a+\dfrac{\exp(-0,5k_{p}^{2})}{(1-p)\sqrt{2\pi}}s$,

где k_p — квантиль стандартного нормального распределения (с параметрами $a=0$ и $s=1$).

Применяя в данном случае формулу (16), получаем, что

$$ES^{+}[X,p]=a+\frac{\exp(-0,5k^{2}_{(1-F_X(0))p+F_X(0)})}{(1-p)\sqrt{2\pi}}s.$$

Заметим, что в нашем случае $F_X(0)=\dfrac{1}{2}$, поэтому

$$ES^{+}[X,p]=a+\frac{\exp(-0,5k^{2}_{0,5p+0,5})}{(1-p)\sqrt{2\pi}}s.$$

Перейдем к получению формулы преобразования меры риска $ES^{(n)}[X,p]$ для $X\in Nor(a,\sigma)$ при переходе к соответствующей условной мере риска.

Используя формулу (18) и выражение для $ES^{+}[X,p]$, получаем:

$$ES^{(n)+}[X,p]=a+\frac{\exp(-0,5k^{2}_{0,5(1-(1-p)^{n})+0,5})}{(1-p)\sqrt{2\pi}}s.$$

Из данной формулы видно, что при $p\to 1$ $ES^{(n)+}[X,p]$ стремится к $+\infty$ со скоростью, возрастающей с ростом n.

Соответственно, формула для $ES^{(t)+}[X,p]$ при произвольном действительном значении $t\geq 1, t=m+\alpha$ приобретает вид:

$$ES^{(t)+}[X,p]=a+\frac{\exp(-0,5k^{2}_{0,5(1-(1-p)^{m}(1-\alpha p))+0,5})}{(1-p)\sqrt{2\pi}}s.$$

ВЫВОДЫ

Чаще всего мы предполагаем, что величина потерь X является случайной величиной, распределенной на всей прямой $(-\infty,+\infty)$. Но иногда исследователи изучают величину потерь, предполагая их неотрицательными, $X \geq 0$. В данной работе мы сначала исследуем, насколько преобразуется распределение вероятностей этой величины при таком переходе. И, соответственно, исследуем формулы преобразования оценки рисков различной катастрофичности при добавлении данного условия. Как выяснилось, в случае, когда случайная величина потерь X заменяется на величину X_+, это никак не отражается на оценке таких мер риска, как VaR, ES, $VaR^{(t)}$ и $ES^{(t)}$. В то же время, когда распределение случайной величины потерь заменяется на ее условное распределение при условии $X \geq 0$, изменяются как формулы оценки данных мер риска, так и величины их оценки, иногда значительно.

Мы надеемся, что результаты данной работы будут способствовать и более осознанному пониманию теоретических утверждений, связанных с мерами рисков, и результатов практических оценок рисков в зависимости от того, на какой основе производилась данная оценка: позволяя потерям принимать и отрицательные значения или сосредотачиваясь лишь на ее положительных значениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука; 1986. 431 с.
   Borovkov A.A. Probability theory. Moscow: Nauka; 1986. 431 p. (In Russ.).
2. Santolino M., Belles-Sampera J., Sarabia J.M., Guillen M. An examination of the tail contribution to distortion risk measures. *Journal of Risk*. 2021;23(6):88–113. DOI: 10.21314/JOR.2021.014
3. Круи М., Галай Д., Марк Р. Основы риск-менеджмента. Пер. с англ. М.: Юрайт; 2018. 390 с.
   Crouhy M., Galai D., Mark R. The essentials of risk management. New York, NY: McGraw-Hill Book Co.; 2005. 416 p. (Russ. ed.: Crouhy M., Galai D., Mark R. Osnovy risk-menedzhmenta. Moscow: Urait; 2018. 390 p.).
4. Hull J.C. Risk management and financial institutions. New York, NY: Pearson Education International; 2007. 576 p.
5. Jorion P. Value at risk: The new benchmark for managing financial risk. New York, NY: McGraw-Hill Education; 2007. 624 p.
6. Минасян В.Б. Новые способы измерения катастрофических рисков: меры «VaR в степени t» и их вычисление. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(3):92–109. DOI: 10.26794/2587–5671–2020–24–3–92–109
   Minasyan V.B. New ways to measure catastrophic financial risks: “VaR to the power of t” measures and how to calculate them. *Finance: Theory and Practice*. 2020;24(3):92–109. DOI: 10.26794/2587–5671–2020–24–3–92–109
7. Минасян В.Б. Меры «VaR в степени t» и «ES в степени t» и меры риска искажения. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(6):92–107. DOI: 10.26794/2587–5671–2020–24–6–92–107
   Minasyan V.B. New risk measures “VaR to the power of t” and “ES to the power of t” and distortion risk measures. *Finance: Theory and Practice*. 2020;24(6):92–107. DOI: 10.26794/2587–5671–2020–24–6–92–107
8. Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd; 2005. 480 p. DOI: 10.1002/0470016450
9. Zhu L., Li H. Tail distortion risk and its asymptotic analysis. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2012;51(1):115–121. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2012.03.010
10. Yang F. First- and second-order asymptotics for the tail distortion risk measure of extreme risks. *Communications in Statistics — Theory and Methods*. 2015;44(3):520–532. DOI: 10.1080/03610926.2012.751116
11. Yin C., Zhu D. New class of distortion risk measures and their tail asymptotics with emphasis on Va R. *Journal of Financial Risk Management*. 2018;7(1):12–38. DOI: 10.4236/jfrm.2018.71002
12. Belles-Sampera J., Guillén M., Santolino M. Beyond value-at-risk: GlueVaR distortion risk measures. *Risk Analysis*. 2014;34(1):121–134. DOI: 10.1111/risa.12080
13. Belles-Sampera J., Guillén M., Santolino M. GlueVaR risk measures in capital allocation applications. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2014;58:132–137. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2014.06.014
14. Минасян В.Б. Модели оценки рисков деятельности компаний, реализующих проекты с НИОКР. *Финансы: теория и практика*. 2019;23(1):133–146. DOI: 10.26794/2587–5671–2019–23–1–133–146
    Minasyan V.B. Risk assessment models of the companies implementing R&D projects. *Finance: Theory and Practice*. 2019;23(1):133–146. DOI: 10.26794/2587–5671–2019–23–1–133–146

15. Минасян В.Б., Новая мера риска VaR в квадрате и ее вычисление. Случай общего закона распределения убытков, сравнение с другими мерами риска. *Управление финансовыми рисками*. 2019;(4):298–320.
Minasyan V.B. New risk measure VaR in the square and its calculation. Case of general law loss distributions, comparison with other risk measures. *Upravlenie finansovymi riskami = Financial Risk Management Journal*. 2019;(4):298–320. (In Russ.).
16. Minimum capital requirements for market risk. Basel Committee on Banking Supervision. Basel: Bank for International Settlements; 2019. 136 p. URL: https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf
17. Минасян В.Б. О сравнении определенных мер катастрофических рисков. *Управление финансовыми рисками*. 2022;(4):284–289. DOI: 10.36627/2221-7541-2022-4-4-284-289
Minasyan V.B. On comparison of certain measures of catastrophic risks. *Upravlenie finansovymi riskami = Financial Risk Management Journal*. 2022;(4):284–289. (In Russ.). DOI: 10.36627/2221-7541-2022-4-4-284-289

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / ABOUT THE AUTHOR

Виген Бабкенович Минасян — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой корпоративных финансов, инвестиционного проектирования и оценки им. М.А. Лимитовского, Высшая школа финансов и менеджмента Российской академии народного хозяйства и государственной службы, Москва, Россия
Vigen B. Minasyan — Cand. Sci. (Phis.-Math.), Assoc. Prof., Head of Limitovskii corporate finance, investment design and evaluation department, Higher School of Finance and Management, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia
https://orcid.org/0000-0001-6393-145X
minasyanvb@ranepa.ru, minasyanvb@yandex.ru

Conflicts of Interest Statement: The author has no conflicts of interest to declare.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 02.02.2023; после рецензирования 28.02.2023; принята к публикации 02.03.2023.
Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
The article was submitted on 02.02.2023; revised on 28.02.2023 and accepted for publication on 02.03.2023.
The author read and approved the final version of the manuscript.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Утверждение

Если $X \in Exp(r,a)$, то справедлива формула $VaR[X,p] = a - \frac{\ln(1-p)}{r}$.

Доказательство

Из определения $VaR[X,p]$ следует, что его значение при любом $p \in (0,1]$ является решением уравнения

$F_X(x) = p$, т.е. $1 - e^{-r(x-a)} = p$, решая данное уравнение относительно *x*, получаем $x = a - \frac{\ln(1-p)}{r}$, а значит, и $VaR[X,p] = a - \frac{\ln(1-p)}{r}$.

Приложение 2

Утверждение

Если $X \in Exp(r,a)$, то справедлива формула $ES[X,p] = a + \frac{1}{r} - \frac{\ln(1-p)}{r}$.

Доказательство

Из определения *Приложения 1* следует, что

$$VaR[X,p] = a - \frac{\ln(1-p)}{r},$$

но тогда, так как $ES[X,p]=\frac{1}{1-p}\int_1^p VaR[X,q]dq$, получаем: $ES[X,p]=\frac{1}{1-p}\int_1^p (a-\frac{\ln(1-q)}{r})dq$.

Применяя интегрирование по частям, получаем:

$$ES[X,p]=\frac{1}{1-p}(a-ap+\frac{1}{r}(1-q)\ln(1-q)|_p^1+\frac{1}{r}\int_1^p dq)=$$

$$=\frac{1}{1-p}(a(1-p)+\frac{1}{r}(1-p)\ln(1-p)+\frac{1}{r}(1-p))=\ a+\ ^1\ -\frac{\ln(1-p)}{r}$$, а значит, и $ES[X,p]=a+\frac{1}{r}-\frac{\ln(1-p)}{r}$.

Приложение 3

Утверждение

Если $X\in Tr(a,b,k)$, то справедлива формула

$$ES[X,p]=\begin{cases} b-\frac{2}{3}\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)},\ \text{если } p\geq\frac{k-a}{b-a} \\ \frac{1}{1-p}[b+a-k+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(k-a)}(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3}-\sqrt{(\frac{b-k}{b-a})^3}-\sqrt{p^3})],\ \text{если } p<\frac{k-a}{b-a}. \end{cases}$$

Доказательство

Как известно (см. [12]), если величина потерь представляется случайной величиной $X\in Tr(a,b,k)$, то справедлива формула

$$VaR[X,p]=\begin{cases} b-\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)}, \text{если } k\leq a(1-p)+bp \\ a+\sqrt{p(b-a)(k-a)}, \text{если } k>a(1-p)+bp. \end{cases}$$

Однако, так как неравенство $k\leq a(1-p)+bq$ эквивалентно неравенству $p\geq\frac{b-k}{b-a}$, а неравенство $k>a(1-q)+bq$ эквивалентно неравенству $p<\frac{b-k}{b-a}$, выражение для $VaR[X,p]$ можно переписать в виде:

$$VaR[X,p]=\begin{cases} b-\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)}, \text{если } p\geq\frac{k-a}{b-a} \\ a+\sqrt{p(b-a)(k-a)}, \text{если } p<\frac{k-a}{b-a}. \end{cases}$$

Как мы знаем, справедлива формула $ES[X,p]=\frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X,q]dq$.
При этом возможны два случая:

а) если $p\geq\frac{k-a}{b-a}$, тогда

$$ES[X,p]=\frac{1}{1-p}\int_p^1[b-\sqrt{(1-q)(b-a)(b-k)}]dq=$$

$$=\frac{1}{1-p}(bq+\frac{2}{3}\sqrt{(1-q)^3(b-a)(b-k)})\Big|_p^1=\frac{1}{1-p}(b(1-p)-\frac{2}{3}\sqrt{(1-p)^3(b-a)(b-k)})=$$

$$=b-\frac{2}{3}\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)},$$

т.е.

$$ES[X,p]=b-\frac{2}{3}\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)};$$

b) если $p<\frac{k-a}{b-a}$, тогда

$$ES[X,p]=\frac{1}{1-p}\int_p^{\frac{k-a}{b-a}}[a+\sqrt{q(b-a)(b-k)}]dq+\frac{1}{1-p}\int_{\frac{k-a}{b-a}}^1[b-\sqrt{(1-q)(b-a)(b-k)}]dq=$$

$$=\frac{1}{1-p}[aq+\frac{2}{3}\sqrt{q^3(b-a)(b-k)}]\Big|_p^{\frac{k-a}{b-a}}+\frac{1}{1-p}[bq+\frac{2}{3}\sqrt{(1-q)^3(b-a)(b-k)}]\Big|_{\frac{k-a}{b-a}}^1=$$

$$=\frac{1}{1-p}[a(\frac{k-a}{b-a}-p)+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(b-k)}(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3}-\sqrt{p^3})+$$

$$+b(1-\frac{k-a}{b-a})-\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(b-k)}\sqrt{(1-\frac{k-a}{b-a})^3}]=$$

$$=\frac{1}{1-p}[b+a-k-ap+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(b-k)}(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3}-\sqrt{(\frac{b-k}{b-a})^3}-\sqrt{p^3})].$$

Таким образом, получаем:

$$ES[X,p]=\begin{cases}b-\frac{2}{3}\sqrt{(1-p)(b-a)(b-k)}, \text{ если } p\ge\frac{k-a}{b-a}\\ \frac{1}{1-p}[b+a-k+\frac{2}{3}\sqrt{(b-a)(k-a)}(\sqrt{(\frac{k-a}{b-a})^3}-\sqrt{(\frac{b-k}{b-a})^3}-\sqrt{p^3})], \text{ если } p<\frac{k-a}{b-a}.\end{cases}$$