

DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-6-175-185
УДК 336.767.3:51(045)
JEL G120, Y80

Параметры облигаций в периоды экономической нестабильности

Н.В. Попова

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В периоды экономической нестабильности инвестиционная активность снижается. Рост доходностей на рынке ценных бумаг, характерный для таких периодов, невыгоден для эмитентов. Колебания процентных ставок и общая нестабильность в экономике способствуют преимущественно краткосрочным вложениям инвесторов. Эмитенты конструируют параметры облигаций, способствующие привлечению инвесторов и снижению рисков. **Цель** данной работы – рассмотреть поведение некоторых управляемых параметров облигации в периоды нестабильности, получить математические доказательства зависимости дюрации и цены облигации от частоты купонных платежей и обосновать возможность рассматривать периодичность купонных выплат как параметр, позволяющий снизить риски инвестора и эмитента. Для получения доказательств использованы **методы** дифференциального исчисления. **Новизна** работы состоит в том, что полученные в работе доказательства отсутствуют в литературе. **Результаты** получены для облигаций, не имеющих кредитного риска. Установлено, что с увеличением числа купонных платежей в году при фиксированных значениях основных параметров дюрация облигации уменьшается, а цена растет. Доказанные утверждения о поведении дюрации и цены облигации согласуются с рыночными наблюдениями. Уменьшение дюрации облигации с увеличением числа купонных платежей в году означает уменьшение «реального срока» и снижение процентного риска облигации, что может заинтересовать инвестора. Рост цены свидетельствует об увеличении спроса на облигации с увеличением числа купонных платежей в году и возможности увеличения дохода эмитента. **Актуальность** работы состоит в том, что условия для экономической нестабильности в России и в мире сохраняются и результаты работы могут представлять интерес для участников рынка облигаций. **Выводы:** в работе показано, что увеличение числа купонных платежей в году способствует росту привлекательности выпуска облигаций как для инвесторов, так и для эмитентов. **Практическая значимость** работы: результаты работы могут быть полезны для инвесторов и эмитентов, специалистов по финансовому инжинирингу при конструировании параметров облигаций, а также в теоретических исследованиях инвестиционных свойств облигаций. **Ключевые слова:** математические методы; купонная облигация; частота купонных платежей; дюрация облигации; цена облигации

Для цитирования: Попова Н.В. Параметры облигаций в периоды экономической нестабильности. *Финансы: теория и практика*. 2024;28(6):175-185. DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-6-175-185

Bond Parameters and Economic Instability

N.V. Popova

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

ABSTRACT

During periods of economic crises, investment activity decreases. The growth of yields on the securities market, typical for such periods, is unprofitable for issuers. Fluctuations in interest rates and general instability in the economy favor mainly short-term investments of investors. Issuers construct bond parameters that help attract investors and reduce risks. **The purpose** of this work is to consider the behavior of some controlled parameters of the bond during periods of instability, to obtain mathematical evidence of the dependence of the duration and price of the bond on the frequency of coupon payments and to justify the possibility of considering the frequency of coupon payments as a parameter that reduces the risks of the investor and the issuer. **Methods** of differential calculus are used to obtain evidence. **The novelty** of the work consists in the fact that the proofs obtained in the work are not available in the literature. The **results** are obtained for bonds that do not have credit risk. It has been established that with an increase in the number of coupon payments per year at fixed values of the main parameters, the duration of the bond decreases, and the price increases. The proven statements about the behavior of the duration and the price of the bond are consistent with market observations. A decrease in the duration of the bond with an increase in the number of coupon payments per

year means a decrease in the “real term” and a decrease in the interest rate risk of the bond, which may be of interest to the investor. The price increase indicates an increase in demand for bonds with an increase in the number of coupon payments per year and the possibility of increasing the issuer’s income. The **relevance** of the work lies in the fact that the conditions for economic instability in Russia and in the world remain and the results of the work may be of interest to participants in the bond market. Conclusions: the paper shows that an increase in the number of coupon payments per year contributes to an increase in the attractiveness of bond issuance for both investors and issuers. **Conclusions:** the paper shows that an increase in the number of coupon payments per year contributes to the growth of the attractiveness of a bond issue for both investors and issuers. **Practical significance** of the work: the results of the work can be useful for investors and issuers, financial engineering specialists in the design of bond parameters, as well as in theoretical studies of the investment properties of bonds.

Keywords: mathematical methods; coupon bond; frequency of coupon payments; bond duration; bond price

For citation: Popova N.V. Bond parameters and economic crises. *Finance: Theory and Practice*. 2024;28(6):175-185. (In Russ.). DOI: 10.26794/2587-5671-2024-28-6-175-185

ВВЕДЕНИЕ

Для периодов экономических трудностей и кризисов характерны нестабильность, рост процентных ставок и инфляция. В условиях стабильного развития экономики рынок облигаций — важная составная часть экономики страны, на котором все участники рынка получают доход. Однако в периоды нестабильности рынок облигаций воспринимается как рискованный с обеих сторон, инвесторов и эмитентов. Замедляется активность на первичном рынке облигаций [1]. После повышения ключевой ставки Банком России в 2014 и 2021 гг. ранее купленные ценные бумаги с фиксированным доходом существенно потеряли в цене, многие инвесторы ушли с рынка. Эмитенты первого эшелона сократили присутствие на рынке¹.

Тем не менее в условиях нестабильности облигации рассматриваются как наиболее надежный инструмент для сохранения средств и финансирования развития экономики страны [2–4]. Действительно, фиксированный поток платежей по облигации снижает уровень неопределенности и риск инвесторов. Согласно исследованиям [5, 6] облигации могут составить хорошую конкуренцию депозитам. По сообщению интернет-ресурса², в периоды нестабильности рост ставок по банковским депозитам всегда отстает от роста ставок по облигациям, что способствует привлечению определенной части инвесторов на рынок облигаций. С другой стороны, интерес к выпуску облигаций, как более выгодному способу привлечения заемных средств, по сравнению с кредитами, в такие периоды проявляют и эмитенты [1, 2]. Выпуск государственных облигаций, например облигаций госу-

дарственного займа (ОФЗ), в периоды нестабильности помогает государству решать проблемы с покрытием дефицита бюджета за счет привлечения сбережений населения РФ, которые в целом значительны [3]. По сообщению Министерства финансов РФ, в 2023–2025 гг. внутренние заимствования будут выступать основным источником финансирования дефицита бюджета³. Как видим, в периоды экономической нестабильности облигации остаются востребованным финансовым инструментом.

Как уже отмечено, в периоды нестабильности рынок облигаций воспринимается участниками рынка как рискованный. Для эмитентов проблема привлечения инвесторов становится более сложной. Финансовый инжиниринг работает над конструированием параметров облигаций, обеспечивающих рост привлекательности выпуска и снижение рисков как для эмитента, так и для инвестора. Согласно [7], цель финансового инжиниринга на рынке облигаций — конструирование таких параметров облигаций, при которых формируемые денежные потоки в наибольшей мере соответствуют основным интересам эмитента, а инвестиционная привлекательность продукта максимально возможная. Эта цель достигается за счет обоснованного выбора и тщательного конструирования каждого отдельного параметра облигации.

Как следует из работ по финансовому инжинирингу [7, 8], срок обращения облигации и купонная ставка — основные управляемые параметры облигации. Параметр периодичности выплат, являющийся второстепенным, также является управляемым. Рассмотрим принципы финансового инжиниринга в отношении этих параметров.

¹ Рынок облигаций в 2021 году: преодолеть нестабильность. URL: <https://www.raexpert.ru/docbank/804/304/9a1/b6c6cf48add84b022b4906e.pdf> (дата обращения: 27.08.2024).

² Рынок облигаций в 2021 году: преодолеть нестабильность. URL: <https://www.raexpert.ru/docbank/804/304/9a1/b6c6cf48add84b022b4906e.pdf> (дата обращения: 27.08.2024).

³ Рынок облигаций: высокая волатильность на фоне большой неопределенности. Обзор рынка рублевых облигаций за 2022 г. политика Минфина РФ на первичном рынке ОФЗ. С. 33. URL: https://rusbonds.ru/rb-docs/analytics/240123_2022.pdf?ysclid=lkmovldjp0985661739 (дата обращения: 27.08.2024).

Согласно [7], срок обращения (параметр срочности) — управляемый параметр, который должен обеспечивать соблюдение интересов как эмитента, так и инвестора. Основное требование к данному параметру — соответствие срока обращения условиям на рынке. Срок обращения облигации может быть как фиксированным, так и переменным, когда инвесторы или эмитент имеют право требовать досрочного погашения облигации (облигации с встроеным колл- или пут-опционом). Чем более стабильна ситуация, тем большее распространение получают облигации с фиксированным сроком погашения.

Ставка купона — это процентная ставка, выплачиваемая эмитентом инвестору периодически до погашения облигации в качестве вознаграждения за долг. Это управляемый параметр, позволяющий управлять рисками как инвестора, так и эмитента [7, 8]. Основное требование к данному параметру — соответствие текущей ситуации на рынке, т.е. размер купонного дохода должен соответствовать текущей доходности аналогичных обязательств. Купонная ставка может быть как фиксированной, так и переменной, когда размер ставки корректируется в соответствии с изменяющимися рыночными условиями. Выпуск облигаций с фиксированной ставкой целесообразен в случае кратко- или среднесрочных выпусков [7]. Размер купона определяется рядом факторов: общие рыночные условия для долговых обязательств данного срока, кредитоспособность эмитента, налоговый статус эмиссии, стоимость обеспечения для поддержки эмиссии [8].

Согласно [7, 8], параметр периодичности выплат, т.е. число купонных платежей в году, оказывает влияние на инвестиционную привлекательность облигации, поскольку фактически означает частоту получения инвесторами промежуточных выплат по облигации. Основной принцип в отношении данного параметра — соответствие частоты выплаты купонного дохода и его периода принятым на рынке. Согласно [9], как правило, проценты по облигации выплачиваются каждые шесть месяцев. В некоторых случаях интервал выплаты процентов сокращается до одного месяца, и совсем редко выплата осуществляется один раз в год. В облигационных займах российских эмитентов наиболее часто применяется продолжительность купонного периода, равная 3 и 6 мес. Автор работы [7] отмечает важность данного параметра именно на российском рынке облигаций: «На развитых рынках, где обращается значительное число инструментов, этот фактор не является столь значимым, однако в российских условиях, при относительно невысоких объемах облигаций в обращении, он может иметь большое значение» [7, с. 57].

ПАРАМЕТРЫ ОБЛИГАЦИЙ И РИСКИ

Для инвестора выделяют два основных вида риска инвестиций в облигации: кредитный риск (риск неплатежеспособности эмитента) и процентный риск (риск роста процентных ставок, ведущий к понижению цен на облигации) [10]. По результатам рыночных исследований факторов риска инвестиций в облигации [11–14], такие параметры облигации, как срок до погашения и купонная ставка, являются факторами риска для инвестора. Рассмотрим, с какого вида рисками инвестора связаны данные параметры.

Срок до погашения — ключевая характеристика облигации [15]. Это период, по истечении которого заемщик обязан полностью выплатить взятую взаймы сумму. По результатам исследований [11–14] возможность для больших рисков, как правило, возникает при долгосрочных инвестициях. Этот большой потенциальный риск обусловлен подверженностью облигаций процентному риску, т.е. риску изменения процентных ставок и, как следствие, риску изменения цен. Причем изменения цен тем больше, чем больше срок до погашения. В работе [16] приведено математическое доказательство зависимости процентного риска облигаций от срока до погашения. Показано, что процентный риск краткосрочных облигаций ниже по сравнению с долгосрочными, что согласуется с рыночными наблюдениями. Согласно [11–14], чем короче срок до погашения облигаций, тем больше они будут интересны инвесторам, поскольку считается, что они имеют меньший риск. Долгосрочные инвестиции связаны с риском неопределенности, особенно в периоды нестабильности, что подвергает инвестора не только процентному риску, но и риску дефолта, риску ликвидности, риску ставки реинвестирования [17, 18].

Согласно [8, 11, 12], ставка купона служит для определения уровня привлекательности облигаций с точки зрения инвесторов. Считается, что чем выше ставка купона, тем более привлекательной будет облигация для инвесторов. Однако, как отмечается в [12], часто упускается из виду тот факт, что высокий купон также показывает относительно низкое качество облигаций, которое должно быть компенсировано высокими ставками купона. По наблюдениям [11, 12], облигации, которые обещают более высокие купоны, как правило, побуждают инвесторов требовать более высокой доходности к погашению, т.е. увеличения премии за риск. Таким образом, высокая купонная ставка может свидетельствовать о наличии риска дефолта. Основные неблагоприятные факторы, на которые может указывать высокая купонная ставка, — это низкий кредитный рейтинг эмитента, высокий налог на дохо-

ды по облигации, наличие колл-опциона в структуре облигации, риск ставки реинвестирования [8, 17].

Рассмотрим, как участники рынка управляют параметрами облигации для снижения рисков в периоды нестабильности. Как уже отмечалось, для периодов экономической нестабильности характерны инфляция, рост ключевой процентной ставки и доходностей на рынке облигаций, что означает подверженность облигаций процентному риску. Рост ставок на рынке облигаций повышает риски дефолтов некоторых компаний, что влечет повышение кредитного риска на рынке облигаций. Для инвестора оба вида риска, кредитный и процентный, в периоды нестабильности становятся реальными, вследствие чего инвесторы предпочитают краткосрочные вложения. Согласно [17], облигации с встроенным пут-опционом могут представлять интерес для инвесторов в ситуации повышения процентных ставок.

Со стороны эмитентов стратегии в данной ситуации формулируются примерно следующим образом⁴: «регулярно делать незначительные по объему выпуски на срок 1,5–3 года», «сейчас, когда ставки повысились, мы делаем более короткие выпуски». Как видим, стратегии эмитентов в периоды неустойчивости соответствуют принципу финансового инжиниринга формирования параметра срочности — соответствие срока обращения облигации условиям на рынке. Согласно [7, с. 43], «при общей нестабильности долгосрочные инструменты либо не будут выкуплены вообще, либо будут приобретены с глубоким дисконтом».

Как видим, в периоды нестабильности участники рынка предпочитают краткосрочные заимствования и инвестиции. По результатам исследования⁵, в 2021 г. в период роста ключевой ставки Банка России и доходностей на рынке облигаций эмитенты резко снизили активность на долгосрочном облигационном рынке. «Размещения на длительный срок в случае неустойчивой ситуации на рынке откладываются» [1, с. 104]. Аналогичный вывод сделан в работе [18] по результатам исследований рынка казначейских облигаций США в периоды двух крупных кризисов — глобального финансового кризиса 2007–2009 гг. и начала пандемии COVID-19 в начале 2020 г.: «В условиях кризиса спрос на краткосрочные казначейские облигации США возрастает, наблюдается резкое увеличение краткосрочного портфельного долга».

Рассмотрим, как эмитент управляет размером купона для привлечения инвесторов. Согласно [8],

любой фактор повышения финансовых потерь и уровня неопределенности инвестора увеличивает размер купона. И наоборот: чем более надежно положение держателей облигаций, тем меньше может быть купон для реализации эмиссии. Наличие обеспечения, конвертируемость облигации могут привлечь инвесторов, и это снижает необходимый для продажи инструмента размер купона. Отзываемость облигации непривлекательна для инвесторов, и поэтому, чтобы продать инструмент, эмитент повышает купонный доход.

Как уже отмечалось, при конструировании облигации размер купона устанавливается в соответствии с принципом адекватности купонного дохода рыночным условиям для сравнимых долговых обязательств. Следовательно, размер купонной ставки характеризует не только эмитента, но и рынок. Облигации, выпущенные в периоды неустойчивости, могут иметь повышенную купонную ставку в соответствии с рыночной доходностью в такие периоды, что целесообразно в случае краткосрочных выпусков для привлечения инвесторов. При длительных размещениях облигаций с повышенной купонной ставкой эмитент несет риск выплаты больших сумм относительно рыночных ставок [7]. Кроме того, высокая купонная ставка снижает процентный риск облигации, что также может привлечь инвестора в период нестабильности.

Как видим, срок обращения облигации и купонная ставка — это управляемые параметры, которые эмитент облигации использует для привлечения инвесторов и снижения рисков.

Можно предположить, что в периоды нестабильности параметр периодичности купонных выплат становится еще одним фактором риска облигаций с ненадежным кредитным рейтингом наряду со сроком до погашения и купонной ставкой. Авторы [7, 8, 19, 20] отмечают важность данного параметра при конструировании выпусков, привлекательных для инвесторов, в том числе в условиях нестабильности в экономике [4]. Согласно [4, 7], для привлечения инвесторов в условиях нестабильности более оправдан выпуск облигаций, купонный период по которым составляет 3 мес., т.е. является наименьшим из принятых на российском рынке.

В данной статье рассматриваются задачи о влиянии параметра периодичности купонных выплат, т.е. числа купонных платежей в году, на значения дюрации и цены облигации без кредитного риска. Это облигации типа ОФЗ на российском рынке облигаций или казначейские облигации на рынке США. Цена и дюрация облигации — важнейшие показатели ее инвестиционных свойств, которые интересуют инвестора в первую очередь наряду с доходностью

⁴ Рынок облигаций в 2021 году: преодолеть нестабильность. URL: <https://www.raexpert.ru/docbank/804/304/9a1/b6c6cf48add84b022b4906e.pdf> (дата обращения: 27.08.2024).

⁵ Там же.

к погашению [21–23]. Для решения задач используются методы дифференциального исчисления. Доходность к погашению облигации рассматривается в виде эффективной процентной ставки, как более корректной в данных исследованиях [24]. На основе полученных результатов периодичность купонных выплат предложено рассматривать как параметр, позволяющий снизить риски инвестора и эмитента.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассматриваются задачи о влиянии частоты купонных платежей на значения дюрации и цены облигации. Облигация не имеет встроенных опционов, является справедливо оцененной и не имеет кредитного риска.

Пусть D_m и P_m — дюрация и котируемая цена облигации, купонные выплаты по которой производятся m раз в году, $m = 1, 2, \dots$. Облигация рассматривается в момент сразу после купонной выплаты, когда до погашения остается T лет и n купонных платежей ($n = Tm$), причем $T > 1$ (иначе при $m = 1$ облигация не является купонной). Дюрацию D_m и цену облигации P_m будем рассматривать как функции числа купонных платежей в году m при заданных сроке до погашения T , купонной ставке f и доходности к погашению r . Влияние параметра m на величину показателя дюрации D_m и цены облигации P_m будем изучать путем дифференцирования по переменной m функций D_m и P_m . Дифференцирование по целочисленной переменной применяется в изучении инвестиционных свойств облигаций. Например, в работах [16, 25, 26].

Рассмотрим выражения для функций D_m и P_m . По определению:

$$D_m = \frac{\sum_{i=1}^{Tm} \frac{i}{m} \cdot \frac{\frac{1}{m} fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}}} + T \cdot \frac{A}{(1+r)^T}}{\sum_{i=1}^{Tm} \frac{\frac{1}{m} fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}}} + \frac{A}{(1+r)^T}},$$

где A — номинал облигации. Это выражение преобразуется к виду:

$$D_m = \frac{\frac{f}{m^2} (1+r)^{\frac{1}{m}} \left((1+r)^T - 1 \right) - T \left((1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \left(\frac{f}{m} - \left((1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \right)}{\left((1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \left(\frac{f}{m} \left((1+r)^T - 1 \right) + (1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Выражение (1) использовано для изучения зависимости дюрации облигации от параметра m .

Рассмотрим выражение для функции P_m . По определению:

$$P_m = \sum_{i=1}^{Tm} \frac{\frac{1}{m} fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}}} + \frac{A}{(1+r)^T}.$$

Данная формула преобразуется к виду:

$$P_m = Af \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T} \right) \beta(m) + \frac{A}{(1+r)^T}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где

$$\beta(m) = \frac{1/m}{(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1}.$$

Выражение (2) использовано для изучения зависимости цены облигации от параметра m . В формулах (1) и (2) доходность к погашению облигации r определена по методу эффективной процентной ставки [15, 24].

В работе А. Джерарда и Кэхилла⁶ приводится анализ доходностей казначейских облигаций США почти за 200 лет. Автор сообщает: «В этот период страна пережила Гражданскую войну, две мировые войны, Великую депрессию и периоды бурного процветания. Тем не менее средняя доходность в 4,62% представляется разумно близкой к уровню доходности сегодняшнего рынка». Таким образом, в формулах (1) и (2) доходность облигации r представляет собой достаточно малую величину, что позволяет при получении доказательств использовать приближенные равенства.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Теорема. При фиксированных значениях основных параметров облигации — сроке до погашения T , где $T > 1$, купонной ставке f и доходности к погашению r , справедливы следующие утверждения:

1. Последовательность $\{D_m\}$ является убывающей.
2. Последовательность $\{P_m\}$ является возрастающей.

Доказательство. 1. $\{D_m\}$ — это числовая последовательность, в которой номер члена последовательности

m совпадает с числом купонных платежей в году. Используем обозначения: $a(m) = (1+r)^{\frac{1}{m}} - 1$, $b = (1+r)^T - 1$. Тогда формула (1) преобразуется к виду:

$$D_m = \frac{\frac{f}{m^2} b (a(m)+1) - T a(m) \left(\frac{f}{m} - a(m) \right)}{a(m) \left(\frac{f}{m} b + a(m) \right)}.$$

Производная этой функции по переменной m имеет вид:

$$D_m' = \frac{1}{B^2} \left[-\frac{f^2 b^2}{m^4} a(m)(a(m)+1) - \frac{2fb}{m^3} a^2(m)(a(m)+1) - \frac{f^2 b^2}{m^3} a'(m) - \right. \\ \left. - \frac{fb}{m^2} a(m)a'(m)(a(m)+2) + \frac{Tf}{m^2} a^3(m)(b+1) + \frac{Tf}{m} (b+1) a^2(m)a'(m) \right],$$

где B^2 — квадрат знаменателя функции D_m , $a'(m) = -\frac{1}{m^2} (1+r)^{\frac{1}{m}} \ln(1+r)$.

Используем приближенные равенства:

$$a(m) = (1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 \approx \frac{r}{m}, \quad b = (1+r)^T - 1 \approx rT,$$

$$\ln(1+r) \approx r, \quad a'(m) = -\frac{1}{m^2} (1+r)^{\frac{1}{m}} \ln(1+r) \approx -\frac{r}{m^2} \left(1 + \frac{r}{m} \right).$$

Тогда получим:

$$D_m' \approx \frac{1}{B^2} \cdot \frac{r^5}{m^6} f T \left(\frac{1}{m} - T \right) < 0,$$

поскольку $m \geq 1$, $T > 1$. Значит, дюрация облигации является убывающей функцией параметра m . Тогда

$$D_m > D_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

— последовательность $\{D_m\}$ является убывающей. Заметим, что этот результат не зависит от купонной ставки. Предел последовательности $\{D_m\}$ равен:

⁶ Джерард А. Кэхилл. Выбор реалистичной дисконтной ставки. URL: http://www.cfin.ru/finanalysis/invest/realistic_disc.shtml (дата обращения: 27.08.2024).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_m = \frac{f((1+r)^T - 1) - T \ln(1+r)(f - \ln(1+r))}{\ln(1+r)(f((1+r)^T - 1) + \ln(1+r))}. \quad (3)$$

Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m = \inf \{D_m\}$, то $D_m \geq \lim_{m \rightarrow \infty} D_m$, $m = 1, 2, \dots$. Утверждение доказано.

2. Рассмотрим теперь задачу о зависимости котируемой цены облигации P_m от числа купонных платежей в году m . Покажем, что последовательность $\{P_m\}$ является возрастающей.

$\{P_m\}$ — это числовая последовательность, в которой номер члена последовательности m совпадает с числом купонных платежей в году. Согласно формуле (2),

$$P_m = Af \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T} \right) \beta(m) + \frac{A}{(1+r)^T}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\beta(m) = \frac{1/m}{(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1}$. Дифференцируем функцию P_m по переменной m :

$$P'_m = Af \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T} \right) \beta'(m),$$

где

$$\beta'(m) = - \frac{(1+r)^{\frac{1}{m}}}{m^2 \left((1+r)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)^2} \left[1 - (1+r)^{-\frac{1}{m}} - \frac{1}{m} \ln(1+r) \right].$$

Знак производной $\beta'(m)$ определяется знаком выражения в квадратных скобках. Выражение в квадратных скобках — это функция вида $\varphi(u) = 1 - (1+r)^{-u} - u \ln(1+r)$, где $u = 1/m$. Так как $m \geq 1$, то $u \in (0, 1]$. Чтобы установить знак функции $\varphi(u)$ на полуинтервале $(0, 1]$, рассмотрим функцию

$$g(u) = \begin{cases} \varphi(u), & 0 < u \leq 1 \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

Функция $g(u)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируема на интервале $(0, 1)$. Так как производная $g'(u) = -\ln(1+r)(1 - (1+r)^{-u}) < 0$ на интервале $0 < u < 1$, то функция $g(u)$ является убывающей на отрезке $0 \leq u \leq 1$. Тогда для любого $u \in (0, 1]$ выполняется неравенство $g(u) < g(0)$. Так как $g(0) = 0$, то $g(u) < 0$ на полуинтервале $0 < u \leq 1$. Так как $g(u) = \varphi(u)$ при $u \in (0, 1]$, то $\varphi(u) < 0$. Тогда производная $\beta'(m) > 0$, где $m \geq 1$. Отсюда производная $P'_m > 0$ при $m \geq 1$ — цена облигации P_m является возрастающей функцией параметра m . Тогда

$$P_m < P_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

— последовательность $\{P_m\}$ является возрастающей. Заметим, что этот результат не зависит от купонной ставки. Предел последовательности $\{P_m\}$ равен:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = \frac{Af}{\ln(1+r)} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T} \right) + \frac{A}{(1+r)^T}. \quad (4)$$

Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = \sup \{P_m\}$, то $P_m \leq \lim_{m \rightarrow \infty} P_m$, $m = 1, 2, \dots$. Утверждения доказаны.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Установлено, что при фиксированных значениях основных параметров облигации дюрация облигации уменьшается, а цена растет с увеличением числа купонных платежей в году. Доказанные утверждения о поведении дюрации и цены облигации согласуются с предыдущими исследованиями [27, 28], где для получения доказательств использовались методы разложения функций в степенные ряды и действия с рядами, такие как сложение и умножение рядов. Полученные результаты подтверждаются данными *таблицы*, где приведены характеристики государственных облигаций (ОФЗ) с близкими сроками до погашения по данным Московской биржи⁷. Видно, что с увеличением числа купонных платежей в году m цена облигации увеличивается, а дюрация уменьшается. Доходность r в таблице — эффективная.

Таблица / Table

Характеристики государственных облигаций (ОФЗ) по данным Московской биржи на 18.12.2023 / Characteristics of Government Bonds (OFZ) According to the Moscow Stock Exchange on 18.12.2023

ВЫПУСК / ISSUE	T (дни/days)	D (дни/days)	Цена / Price	m	$f, \%$	$r, \%$
SU 29016RMFS 1	1101	949	100	4	–	9,47
SU 26207RMFS 9	1143	993	91,75	2	8,15	11,76
SU 29020RMFS 3	1374	1145	99,68	4		9,6
SU 26232RMFS 7	1388	1230	83,40	2	6	11,82
SU 29019RMFS 5	2039	1517	99,05	4		11,74
SU 26242RMFS 6	2081	1597	89,0	2	9	11,85

Источник / Source: составлено по данным Московской биржи / Compiled by the author according to the Moscow Stock Exchange. URL: <http://www.moex.com/> (дата обращения: 18.12.2023).

Уменьшение дюрации облигации с увеличением числа купонных платежей в году означает уменьшение «реального срока» и снижение процентного риска облигации, что может привлечь инвестора в условиях кризиса и нестабильности. Рост цены может означать рост спроса на облигации со стороны инвесторов и, следовательно, рост дохода эмитента с увеличением числа купонных платежей в году. Согласно экономической теории⁸, «увеличение спроса увеличивает равновесную цену и равновесное количество продукта», что может заинтересовать эмитента в период нестабильности.

Приведенная интерпретация результатов работы соответствует рекомендации специалистов по финансовому инжинирингу для привлечения инвесторов: «целесообразно устанавливать минимальный принятый купонный период для повышения инвестиционной привлекательности облигации за счет частоты периодических выплат» [7, с. 136]. Интерпретация результатов согласуется также с рыночными наблюдениями. Например⁹: «Большую ценность имеют бумаги, ставка по которым выплачивается чаще».

Заметим, что результаты получены для облигаций, не имеющих кредитного риска, поскольку компания с низким кредитным рейтингом вряд ли возьмет на себя обязательство чаще выплачивать купоны.

ВЫВОДЫ

Срок обращения облигации и купонная ставка — основные управляемые параметры облигации, которые эмитент облигации использует для привлечения инвесторов и снижения рисков. На основе приведенных в статье доказательств зависимости дюрации и цены облигации от числа купонных платежей в году предложено периодичность купонных выплат рассматривать как параметр, позволяющий снизить риски эмитента и инвестора. Уменьшение дюрации облигации с увеличением числа купонных платежей в году

⁷ Сайт Московской биржи. URL: <http://www.moex.com/> (дата обращения: 18.12.2023).

⁸ Тумашев А. Р., Котенкова С. Н., Тумашева М. В. Экономическая теория. Часть I. Введение в экономическую теорию. Микроэкономика. Казань: Казан. ун-т; 2011:61.

⁹ ОФЗ Доход. URL: <https://ofzdohod.ru/bonds/parameter-i-dokhodnost/kuponnyi-dokhod-obligatcii/> (дата обращения: 27.08.2024).

способствует росту привлекательности облигации для инвесторов вследствие уменьшения «реального срока» и снижения процентного риска облигации. Рост цены облигации с увеличением частоты купонных выплат может свидетельствовать об увеличении спроса на облигации со стороны инвесто-

ров и возможности увеличения дохода эмитента. Результаты работы могут быть полезны для практического инвестирования, при конструировании параметров облигаций в условиях нестабильности, а также в теоретических исследованиях инвестиционных свойств облигаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полякова Т.Н. Российский рынок биржевых облигаций: анализ размещения. *Вестник Института экономики Российской академии наук*. 2022;(5):97–118. DOI: 10.52180/2073–6487_2022_5_97_118
2. Алексеева И.А., Макарова Е.В. Российский рынок корпоративных облигаций: тенденции и перспективы развития. *Известия Байкальского государственного университета*. 2017;27(3):389–400. DOI: 10.17150/2500–2759.2017.27(3).389–400
3. Воробьева Е.И. Российский рынок облигаций: состояние и перспективы. *Научный вестник: финансы, банки, инвестиции*. 2017;(2):90–101.
4. Воробьев Ю.Н. Финансовое обеспечение хозяйственной деятельности организаций в условиях нестабильности рынков. *Научный вестник: финансы, банки, инвестиции*. 2014;(4):6–15.
5. Николаева А.А., Кох И.А. Инвестирование в облигации как альтернатива банковским депозитам. *Тенденции развития науки и образования*. 2020;(66–3):181–186. DOI: 10.18411/lj-10–2020–138
6. Лессард К., Трегуб А.В. Сравнительный анализ доходностей облигаций и банковских депозитов в США и России. *Тенденции развития науки и образования*. 2021;(69–1):158–163. DOI: 10.18411/lj-01–2021–43
7. Воробьева З.А. Финансовый инжиниринг на рынке корпоративных облигаций. Дис. ... канд. экон. наук. М.: Финансовая Академия при Правительстве РФ; 2004. 305 с. URL: http://www.mirkin.ru/_docs/dissert034.pdf
8. Маршалл Дж.Ф., Бансал В.К. Финансовая инженерия: полное руководство по финансовым нововведениям. Пер. с англ. М.: Инфра-М; 1998. 784 с.
9. Гитман Л. Дж., Джонс М.Д. Основы инвестирования. Пер. с англ. М.: Дело; 1999. 1008 с.
10. Россохин В.В. Анализ учета факторов риска в доходности облигаций. М.: Интернаука; 2019. 112 с.
11. Che-Yahya N., Abdul-Rahim R., Mohd-Rashid R. Determinant of corporate bond yield: The case of Malaysian bond market. *International Journal of Business and Society*. 2016;17(2):245–258. DOI: 10.33736/ijbs.523.2016
12. Simu N. Determinants of Indonesia corporate bond yield. *Business and Economic Horizons*. 2017;13(5):619–629. DOI: 10.15208/beh.2017.42
13. Sintami A.A., Marsoem B.S. Analysis of factors affecting yield to maturity of corporate bonds traded on Indonesia Stock Exchange 2016–2018. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*. 2020;5(7):1443–1451. DOI: 10.38124/IJISRT20JUL733
14. Dhar S.K. Determinants of corporate bond's yields in economy. *SSRN Electronic Journal*. 2016. DOI: 10.2139/ssrn.2761308
15. Фабозци Ф. Дж. Управление инвестициями. Пер. с англ. М.: Инфра-М; 2000. 932 с.
16. Попова Н.В. Процентный риск облигаций в условиях изменяющейся ключевой ставки. *Финансы: теория и практика*. 2022;26(3):186–195. DOI: 10.26794/2587–5671–2022–26–3–186–195
17. Фабозци Ф.Д. Рынок облигаций: Анализ и стратегии. 2-е изд. Пер. с англ. М.: Альпина Бизнес Букс; 2007. 950 с.
18. Davis J.S. Treasuries' allure as safe haven noted in short maturities, not in long bonds. Federal Reserve Bank of Dallas. Jun. 27, 2023. URL: <https://www.dallasfed.org/research/economics/2023/0627>
19. Семернина Ю.В. Методология моделирования параметров планируемых выпусков корпоративных облигаций. *Экономический анализ: теория и практика*. 2012;(24):31–49.
20. Павельева Е.А. Конструирование параметров ценных бумаг, обеспеченных активами, с использованием финансового инжиниринга. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление*. 2012;(2):231–239.
21. Horchani S. The effect of default and conversion options on bond duration. *The Journal of Fixed Income*. 2016;25(3):26–35. DOI: 10.3905/jfi.2016.25.3.026
22. Khachatryan G. A better alternative to conventional bond in the context of risk management. *European Research Studies Journal*. 2019;22(1):209–220. DOI: 10.35808/ersj/1419
23. Nie J., Wu Z., Wang S., Chen Y. Duration strategy for bond investment based on an empirical study. In: Proc. 2021 3rd Int. conf. on economic management and cultural industry (ICEMCI 2021). Dordrecht: Atlantis Press

- International B. V.; 2021. (Advances in Economics, Business and Management Research). DOI: 10.2991/assehr.k.211209.278
24. Попова Н.В. О доходности к погашению купонной облигации. *Финансы: теория и практика*. 2023;27(3):126–138. DOI: 10.26794/2587–5671–2023–27–3–126–138
25. Malkiel B.G. Expectations, bond prices, and the term structure of interest rates. *The Quarterly Journal of Economics*. 1962;76(2):197–218. DOI: 10.2307/1880816
26. Hawawini G.A. On the mathematics of Macaulay’s duration: A note. INSEAD Research Working Papers. 1982;(3). URL: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82–03.pdf
27. Попова Н.В. Влияние частоты купонных платежей на показатель дюрации облигации. *Вестник Финансового университета*. 2015;(4):104–115.
28. Попова Н.В. Задача о влиянии числа купонных платежей в году на цену облигации и ее решения. *Фундаментальные исследования*. 2020;(12):186–191.

REFERENCES

1. Polyakova T.N. Russian market of exchange-traded bonds: Placement analysis. *Vestnik Instituta ekonomiki Rossiiskoi akademii nauk = Bulletin of the Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences*. 2022;(5):97–118. (In Russ.). DOI: 10.52180/2073–6487_2022_5_97_118
2. Alekseeva I.A., Makarova E.V. Russian corporate bond market: Tendencies and development prospects. *Izvestiya Baikal’skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*. 2017;27(3):389–400. (In Russ.). DOI: 10.17150/2500–2759.2017.27(3).389–400
3. Vorobyeva E.I. Russian bond market: State and prospects. *Nauchnyi vestnik: finansy, banki, investitsii = Scientific Bulletin: Finance, Banking, Investment*. 2017;(2):90–101. (In Russ.).
4. Vorob’ev Yu.N. Financial support for the economic activities of organizations in conditions of market instability. *Nauchnyi vestnik: finansy, banki, investitsii = Scientific Bulletin: Finance, Banking, Investment*. 2014;(4):6–15. (In Russ.).
5. Nikolaeva A.A., Kokh I.A. Investing in bonds as an alternative to bank deposits. *Tendentsii razvitiya nauki i obrazovaniya*. 2020;(66–3):181–186. (In Russ.). DOI: 10.18411/lj-10–2020–138
6. Lessard K., Tregub A.V. Comparative analysis of yields on bonds and bank deposits in the USA and Russia. *Tendentsii razvitiya nauki i obrazovaniya*. 2021;(69–1):158–163. (In Russ.). DOI: 10.18411/lj-01–2021–43
7. Vorob’eva Z.A. Financial engineering in the corporate bond market. Cand. econ. sci. diss. Moscow: Financial Academy under the Government of the Russian Federation; 2004. 305 p. URL: http://www.mirkin.ru/_docs/dissert034.pdf (In Russ.).
8. Marshall J.F., Bansal V.K. Financial engineering: A complete guide to financial innovation. New York, London: New York Institute of Finance; 1992. 728 p. (Russ. ed.: Marshall J.F., Bansal V.K. Finansovaya inzheneriya: polnoe rukovodstvo po finansovym novovvedeniyam. Moscow: Infra-M; 1998. 784 p.).
9. Gitman L.J., Joehnk M.D. Fundamentals of investing. Reading, MA: Addison-Wesley; 1998. 720 p. (Russ. ed.: Gitman L.J., Joehnk M.D. Osnovy investirovaniya. Moscow: Delo; 1999. 1008 p.).
10. Rossokhin V.V. Analysis of risk factors in bond yields. Moscow: Internauka; 2019. 112 p. (In Russ.).
11. Che-Yahya N., Abdul-Rahim R., Mohd-Rashid R. Determinant of corporate bond yield: The case of Malaysian bond market. *International Journal of Business and Society*. 2016;17(2):245–258. DOI: 10.33736/ijbs.523.2016
12. Simu N. Determinants of Indonesia corporate bond yield. *Business and Economic Horizons*. 2017;13(5):619–629. DOI: 10.15208/beh.2017.42
13. Sintami A.A., Marsoem B.S. Analysis of factors affecting yield to maturity of corporate bonds traded on Indonesia Stock Exchange 2016–2018. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*. 2020;5(7):1443–1451. DOI: 10.38124/IJISRT20JUL733
14. Dhar S.K. Determinants of corporate bond’s yields in economy. *SSRN Electronic Journal*. 2016. DOI: 10.2139/ssrn.2761308
15. Fabozzi F.J. Investment management. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall; 1998. 837 p. (Russ. ed.: Fabozzi F.J. Upravlenie investitsiyami. Moscow: Infra-M; 2000. 932 p.).
16. Popova N.V. Interest rate risk of bonds in the condition of a changing key rate. *Finance: Theory and Practice*. 2022;26(3):186–195. DOI: 10.26794/2587–5671–2022–26–3–186–195
17. Fabozzi F.J. Bond markets, analysis and strategies. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Addison-Wesley; 2004. 670 p. (Russ. ed.: Fabozzi F.J. Rynok obligatsii. Analiz i strategii. Moscow: Alpina Business Books; 2007. 950 p.).

18. Davis J.S. Treasuries' allure as safe haven noted in short maturities, not in long bonds. Federal Reserve Bank of Dallas. Jun. 27, 2023. URL: <https://www.dallasfed.org/research/economics/2023/0627>
19. Semernina Yu.V. Methodology for modeling parameters of planned corporate bond issues. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika = Economic analysis: theory and practice*. 2012;(24):31–49. (In Russ.).
20. Paveljeva E.A. Constructing characteristics of the asset-backed securities employing financial engineering. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika i upravlenie = Proceedings of Voronezh State University. Series: Economy and Management*. 2012;(2):231–239. (In Russ.).
21. Horchani S. The effect of default and conversion options on bond duration. *The Journal of Fixed Income*. 2016;25(3):26–35. DOI: 10.3905/jfi.2016.25.3.026
22. Khachatryan G. A better alternative to conventional bond in the context of risk management. *European Research Studies Journal*. 2019;22(1):209–220. DOI: 10.35808/ersj/1419
23. Nie J., Wu Z., Wang S., Chen Y. Duration strategy for bond investment based on an empirical study. In: Proc. 2021 3rd Int. conf. on economic management and cultural industry (ICEMCI 2021). Dordrecht: Atlantis Press International B.V.; 2021. (Advances in Economics, Business and Management Research). DOI: 10.2991/assehr.k.211209.278
24. Popova N.V. On the yield to maturity of a coupon bond. *Finance: Theory and Practice*. 2023;27(3):126–138. DOI: 10.26794/2587-5671-2023-27-3-126-138
25. Malkiel B.G. Expectations, bond prices, and the term structure of interest rates. *The Quarterly Journal of Economics*. 1962;76(2):197–218. DOI: 10.2307/1880816
26. Hawawini G.A. On the mathematics of Macaulay's duration: A note. INSEAD Research Working Papers. 1982;(3). URL: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82-03.pdf
27. Popova N. The impact of coupon payments frequency on the bond duration. *Vestnik Finansovogo universiteta = Bulletin of the Financial University*. 2015;(4):104–115. (In Russ.).
28. Popova N.V. The problem of the influence of the number of coupon payments per year on the bond price and its solutions. *Fundamental'nye issledovaniya = Fundamental Research*. 2020;(12):186–191. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / ABOUT THE AUTHOR



Наталья Владимировна Попова — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия
Natalya V. Popova — Cand. Sci. (Phys. and Math.), Assoc. Prof., Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia
<http://orcid.org/0000-0002-3700-5249>
nat_popova@mail.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Conflicts of interest statement: the author has no conflicts of interest to declare.

Статья поступила в редакцию 10.02.2023; после рецензирования 08.03.2023; принята к публикации 27.03.2023.
Автор прочитала и одобрила окончательный вариант рукописи.
The article was submitted on 10.02.2023; revised on 08.03.2023 and accepted for publication on 27.03.2023.
The author read and approved the final version of the manuscript.