МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 681.3

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯМИ СРЕДСТВАМИ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

ОДИНЦОВ БОРИС ЕФИМОВИЧ
доктор экономических наук, профессор кафедры «Информационные технологии», Финансовый университет, Москва, Россия
E-mail: *odintsov45@list.ru*

РОМАНОВ АНАТОЛИЙ НИКОЛАЕВИЧ
доктор экономических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, научный руководитель Финансового университета, Москва
E-mail: *aromanov@fa.ru*

АННОТАЦИЯ

Оптимизационные модели, в основе которых лежат линейные модели, называют «жесткими», так как они в большинстве случаев не приводят к желаемым результатам. Поэтому ряд авторов предлагают перейти от линейных моделей к нелинейным, т.е. к «мягким», что и должно, по их мнению, обеспечить устойчивость оптимизируемой системы. Жесткость модели, заданной в форме оптимизационной задачи, заключается не только в линейности или нелинейности ее целевой функции или ограничений, но также и в отсутствии гибкой взаимозаменяемости ресурсов в случае их нехватки. Кроме того, имеет место одноуровневое, т.е. сильно упрощенное отражение зависимости критерия управления (целевой функции) от имеющихся ограничений на ресурсы. Отсюда появляется настоятельная потребность в использовании интегрированных критериев эффективности экономического управления, что требует изменения во взглядах на отражение зависимостей между стратегическими и оперативными целями, с одной стороны, и ресурсами — с другой. Такое требование стимулирует поиск новых методов оптимизации.

Предлагаемый метод базируется на расширенном понятии «ресурс», позволившем, в свою очередь, ввести понятие взаимозаменяемости ресурсов различной природы. Метод ориентируется на применение обратных вычислений, заключающийся в том, что расчеты ведутся от известного прироста значений функции к неизвестным приростам аргументов-показателей, отражающих уровень в достижении целей управления с заданной приоритетностью.

Сформулированы и обоснованы принципы, а также изложены этапы иного взгляда на оптимизацию управленческих решений. Первый и главный принцип заключается в изменении направления поиска экстремального значения целевой функции на противоположный: направление «ограничения → целевая функция» меняется на направление «целевая функция → ограничения». Второй принцип заключается в замене статических (жестких) ограничений на «мягкие», позволяющие реализовать идею взаимозаменяемости ресурсов.

При возрастающей нехватке ресурсов все больше внимания уделяется методам, ориентированным на их максимальную экономию, поэтому в настоящей работе данная проблема рассматривается в качестве перспективной сферы приложения излагаемого метода оптимизации.

Ключевые слова: оптимизация; принципы; метод; обратные вычисления; взаимозаменяемость ресурсов.

AN ITERATION METHOD OF COMPANY MANAGEMENT OPTIMIZATION USING INVERSE CALCULATIONS

BORIS YE. ODINTSOV
ScD (Economics), full professor, the Information Technologies Chair, the Financial University, Moscow, Russia
E-mail: *odintsov45@list.ru*

ANATOLIY N. ROMANOV
ScD (Economics), full professor, Honored Scientist of the Russian Federation, academic adviser with the Financial University, Moscow, Russia
E-mail: *aromanov@fa.ru*

АННОТАЦИЯ

Optimization models based on linear models are referred to as «rigid» because in the majority of cases they do not provide needed results. Therefore, some authors suggest non-linear «soft» models as a substitute for linear ones since they are supposed to make an optimized system more robust. The rigidity of a model that is set as an optimization task is concerned not so much with linearity or non-linearity of its target function as with the lack of flexible substitution of resources in case of their shortage. Furthermore, the dependence of the management criterion (the target function) on the current resource constraints is reflected in a one-level, i.e. very simplified way. Hence a necessity arises to use integrated criteria of economic management efficiency, which requires a different look at the reflection of dependences between strategic and tactical purposes, on the one hand, and resources, on the other hand. This requirement encourages the search of new optimization methods.

The proposed method is based on the expanded «resource» concept, which in turn has made it possible to introduce a concept of interchangeability of resources of various nature. The method is oriented at the use of inverse calculations when calculations are carried out from a known increment of function values towards unknown increments of performance indicators as arguments to reflect the level of reaching prioritized management goals.

The paper formulates and substantiates the principles and provides a step-by-step description of an alternative approach to the optimization of management solutions. The first and foremost principle concerns reversing the direction of the search for the extreme value of the target function: the «constraints → target function» direction is changed for that of «target function → constraints». The second principle means replacement of static (rigid) constraints with «soft» ones making it possible to realize the idea of interchangeability of resources.

In the situation of increasing shortage of resources, more attention is being paid to methods ensuring their maximum saving, therefore this problem is viewed in the paper as a possible sphere for application of the optimization method described herein.

Keywords: optimization; principles; method; inverse calculations; interchangeability of resources.

1. АКТУАЛЬНОСТЬ ПОИСКА НОВЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизационные модели на протяжении многих десятилетий играли важную роль в принятии решений в различных отраслях человеческой деятельности. Анализируя состояние дел в области оптимизации, академик В.И. Арнольд в работе [1] приходит к следующему выводу: «Оптимизация параметров плана может приводить к полному уничтожению планируемой системы вследствие возникающей из-за оптимизации неустойчивости» [1, с. 13]. Причину этого он видит в «жесткости» используемых моделей, основой построения которых в большинстве случаев являются линейные дифференциальные уравнения. Автор делает следующий вывод: следует перейти от «жестких» моделей к «мягким», т.е. нелинейным, которые и должны обеспечить устойчивость системы.

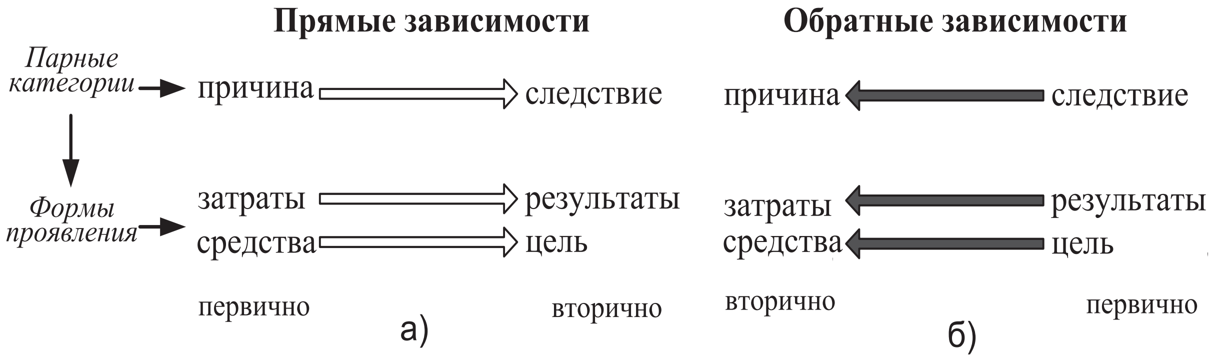

Рис. 1. **Формы проявления парной категории «причина-следствие»**

На наш взгляд, жесткость модели, заданной в форме оптимизационной задачи, предусматривает не только линейность или нелинейность ее целевой функции либо ограничений, но и предопределяет:

- отсутствие гибкой взаимозаменяемости ресурсов в случае их нехватки;
- одноуровневое, т.е. сильно упрощенное отражение зависимости критерия управления (целевой функции) от имеющихся ограничений (ресурсов);
- невозможность оперативного использования знаний и опыта лица, принимающего решение, в процессе адаптации задачи к новым реалиям (корректировка приоритетов в достижении цели).

Перечисленные недостатки по-разному влияют на устойчивость системы. Например, невозможность замены в случае нехватки одного ресурса другим в процессе расчетов ведет к их остановке, а непосредственная зависимость целевой функции от ограничений сильно упрощает реальные цели управления, так как одни цели реализуются за счет достижения других, связанных либо сетевой, либо иерархической зависимостью. Интегральные критерии управления предприятиями, например конкурентоспособность, рыночная добавленная стоимость, рентабельность собственного капитала и др., выраженные в форме целевой функции, являются достаточно общими, чтобы их можно было непосредственно увязать с ограничениями на используемые ресурсы. Сделать это в известных оптимизационных моделях невозможно, за исключением тех, что воспроизводят зависимости с помощью функционалов. Однако известные методы вариационного исчисления, предназначенные для поиска экстремумов функционалов, страдают тем же недостатком, что и обычные оптимизационные задачи, а именно невозможностью замены в случае нехватки одного ресурса другим в процессе решения задачи.

Борьба с «жесткостью» модели не должна сводиться лишь к переходу к нелинейным зависимостям. Более важной, на наш взгляд, является возможность многоступенчатого отражения интегрального критерия управления в ограничениях на ресурсы, а также оперативной корректировки приоритетности целей (подцелей) в процессе поиска решения. Обладая знаниями о путях и приоритетах в достижении целей, о ресурсах, которыми владеет предприятие, состоянии дел на рынке, состоянии конкурентов, уровне инфляции, о возможных изменениях в социальной обстановке в регионе и в стране в целом, лицо, принимающее решение, должно иметь возможность оперативно и без особых усилий отражать эти знания в параметрах оптимизационной задачи, тем самым адаптируя ее к изменяющейся рыночной конъюнктуре.

2. ОСНОВЫ ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В силу фундаментальных особенностей восприятия человеком окружающего мира он изучает его с помощью парных категорий, таких как *сущность и явление, содержание и форма, целое и часть и т. д. С точки зрения управления интерес среди них вызывает категория, характеризующая упорядоченность процессов развития*: одно явление (событие) вызывает к жизни другое, являясь его причиной. Такая парная категория получила название «причина-следствие». Формы ее проявления в экономике различны: затраты-результаты, средства-цели и т.д. В формах проявления парности категории выделим ту, что является первичным (независимым) и вторичным (зависимым) *(рис.1)*.

Цель изучения данной парной категории состоит в поиске формы проявления прямых связей между первичными и вторичными категориями, а цель организации процесса управления состоит в замене мест этих категорий, что позволяет формировать управляющие воздействия (предписания).

Результаты изучения воздействия вторичных категорий на первичные находят свое отражение с различной степенью адекватности в прямых зависимостях (следствий от причин). Эти зависимости воспроизводят существующее положение вещей, т.е. воссоздают то, «как есть». В обобщенном виде результаты изучения и последующего моделирования прямых связей можно представить следующим образом (см. *рис. 1, а*):

следствие = f (причина),
результат = f (затраты),
достижение цели = f (средства),

где *f* указывает на прямую зависимость между причиной и следствием, средствами и целью, затратами и результатами и т.д.

Рассматривая эти связи, невозможно увидеть то, что объективно сопровождает управленческую деятельность человека, — цель, в соответствии с которой он действует. А между тем изучение и объяснение этих процессов происходит с вполне определенной преследуемой им целью. В силу своей природы человек после изучения того, «как есть», затем непременно инициирует процесс перехода к тому, «как нужно». Человеку не свойственна лишь пассивная констатация фактов или событий, ему в подавляющих случаях требуется организация воздействия на эти события в соответствии со своими целями (потребностями).

Процесс перехода к тому, «как нужно», т.е. влияние на события, требует внесения дополнений в прямые зависимости, отражающие цели человека. Кроме того, сами зависимости должны рассматриваться «задом наперед». Если ранее в качестве ведущих понятий рассматривались причина, средства, затраты, а в качестве ведомых следствие, цель, результаты, то для управления они должны поменяться местами. В обобщенном виде такую трансформацию можно представить следующим образом *(рис. 1, б):*

причина = g (следствие),
затраты =g (результаты),
средства =g (цель),

где *g* указывает на обратную зависимость между используемыми категориями.

Здесь мы приходим к обратным вычислениям, ибо цель всякого исследования событий как таковых принципиально отличается от цели исследования, результаты которого предназначены для последующего влияния на эти события человеком. Первичным является изучение и воспроизведение с помощью моделей прямых зависимостей, т.е. того, «как есть», а вторичным — изучение обратных связей с целью изменения того, «как есть», на то, «как должно быть». При этом существует довольно важная особенность: изучение и применение обратных связей возможно лишь при наличии результатов изучения прямых связей. Это является основой для получения управляющих воздействий за счет расчетов приростов аргументов функций, отражающих показатели функционирования конкретных структурных подразделений предприятия.

Статус обратных зависимостей, рассматриваемых ранее как что-то второстепенное, не мог не повлиять на эффективность многих программных систем, предназначенных для управления предприятием. Ярким примером здесь могут служить стремительно распространяемые в 1980-е гг. экспертные системы, которые затем также стремительно и увяли. Такая же участь постигла множество систем формирования или поддержки принятия решений.

Для того чтобы подобные системы стали реально влиять на качество управления, в основу их построения, кроме формализованных прямых зависимостей, должны быть положены и обратные, рассматриваемые сквозь призму антропоморфных целевых установок. Примером могут служить следующие задачи.

1. Прямая задача: какова рентабельность предприятия?

2. Задача обратных вычислений: что следует предпринять, чтобы рентабельность повысилась на А%?

Для постановки задачи обратных вычислений требуется:

- дополнить прямые зависимости целевой установкой лица, формирующего решение, указав желаемый тренд изменения каждого из аргументов прямой функции;
- указать приоритетность в путях достижения целей, отражаемых с помощью задаваемых коэффициентов.

Детально методы решения такого рода задач представлены в [2, 3], здесь же сделаем некоторые обобщения, касающиеся подходов к оптимизации. Согласно теории факторного анализа определить часть прироста функции за счет какого-либо из аргументов можно по формулам из [4, с. 98–99].

Например, для мультипликативных моделей эти формулы имеют вид:

$$y = xz;\ \Delta y = x_1 z_1 - x_0 z_0 = y_x + y_z;$$
$$y_x = \frac{1}{2}\Delta x(z_0 + z_1),\ y_z = \frac{1}{2}\Delta z(x_0 + x_1).$$

Тогда, если считать, что желаемые приросты аргументов функции должны быть пропорциональными величине коэффициентов их приоритетности, можно записать следующее:

$$\frac{y_x}{y_z} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta x(z + z + \Delta z)}{\Delta z(x + x + \Delta x)} = \frac{\alpha}{\beta}\ .$$

Это позволяет рассчитать те приросты аргументов, которые обеспечат необходимый прирост функции с помощью системы уравнений, имеющей вид:

$$\begin{cases} C + \Delta C = f(x + \Delta x(\alpha), z + \Delta z(\beta)) \\ \dfrac{\Delta x(2z + \Delta z)}{\Delta z(2x + \Delta x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases},$$

где $\Delta x, \Delta z$ — искомые приросты аргументов, зависимые от коэффициентов приоритетности $\alpha,\ \beta$.

Здесь выражения Δ $\Delta x(\alpha)$ и $\Delta z(\beta)$ указывают на зависимость прироста Δx от соответствующего коэффициента приоритетности. Обязательным условием выступает ограничение $\alpha + \beta = 1$. Очевидно, что $\Delta x, \Delta z$ и есть управляющие воздействия на соответствующие структурные подразделения предприятия.

Необходимо заметить, что корректный расчет абсолютных величин приростов далеко не всегда возможен, поэтому в уже упомянутых работах [2, 5, 6] разработано шесть методов, обеспечивающих обработку большинства возможных вариантов прямых зависимостей.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Большинство решений, принимаемых в экономике, так или иначе касается ресурсов, приданных для достижения цели управления предприятием, организацией, концерном, регионом и т.д. При этом рациональное использование ресурсов свидетельствует о высоком качестве управления, способствует повышению конкурентоспособности предприятия. Отсюда такие оптимизационные задачи, как правило, ориентированы на поиск решений, которые позволят максимально приблизиться к цели управления с минимальными ресурсными затратами.

Для постановки задачи обратной оптимизации необходимо расширить общеизвестное понятие «взаимозаменяемость ресурсов». Данное понятие будет объединять два компонента: собственно ресурсы (СР) и условные ресурсы (УР). СР включают в себя традиционные ресурсы (материальные, трудовые, финансовые, энергетические и т.д.), а УР — это показатели, которые не могут рассматриваться в качестве ресурсов с традиционной точки зрения, но с их помощью можно достичь некоторых заданных целей управления. К ним относятся: цены, затраты, себестоимость, банковский процент и т.д. Например, если для достижения цели «увеличить выручку» не хватает материальных средств на производство нужного объема товара, то их нехватку можно возместить за счет другого ресурса, например увеличения продажной цены. Здесь «цена» наравне с материальными ресурсами также выступает в качестве ресурса, за счет которого достигается цель управления [5, 6].

Такое деление позволяет ввести следующее определение взаимозаменяемости ресурсов. *Под взаимозаменяемостью ресурсов будет*

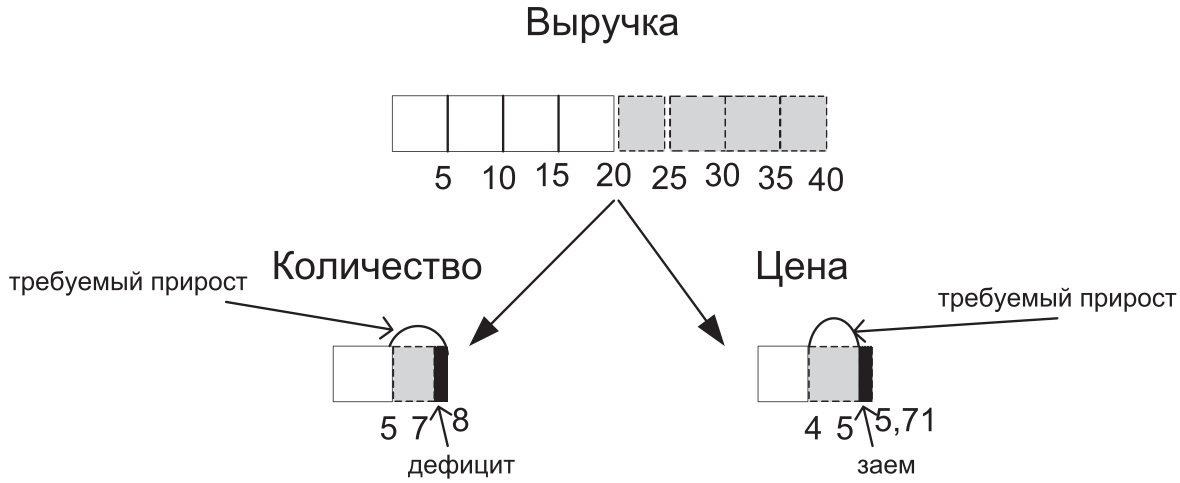

Рис. 2. **Иллюстрация процедуры заимствования ресурсов**

пониматься процесс вычисления эквивалентного объема одного или нескольких недостающих ресурсов одной природы ресурсами другой или той же природы.

Расширенное понимание понятия взаимозаменяемости ресурсов, в свою очередь, позволяет ввести процедуру их заимствования. Непременным условием ее выполнения является наличие алгоритмической (формульной) связи между ресурсом, которого не хватает, и ресурсом-заменителем.

Обратимся к уже упомянутому показателю выручки, зависимой от количества изготавливаемой продукции и ее продажной цены за единицу *(рис. 2).*

Допустим, известна выручка (равная 20 ед.), полученная путем умножения количества продукции, равного 5 ед., на цену, равную 4 ед. Пусть ставится цель повысить объем выручки до 40 ед. путем увеличения количества продукции до 8 ед. и повышения цены до 5 ед. Если при этом повышение количества возможно лишь до 7 ед., то, естественно, полное достижение цели произойдет за счет повышения цены на величину, примерно равную 5,71 (40/7). Здесь цена наравне с количеством продукции рассматривается в качестве ресурса, позволяющего обеспечить достижение поставленной цели. Таким образом, ресурс одной природы может быть заменен на другой, той же или иной природы.

Приведенное пояснение позволяет изложить иной взгляд на оптимизацию управленческих решений, который выражается в следующих принципах.

1. Процесс поиска экстремального значения целевой функции должен быть иным: направление «ограничения →целевая функция» меняется на направление «целевая функция → ограничения».
2. Статические (жесткие) ограничения должны быть заменены динамическими, позволяющими реализовать идею взаимозаменяемости ресурсов.
3. Приоритеты в использовании ресурсов и направления в достижении главной цели и подцелей должны использоваться в качестве параметров в расчетах.
4. Должна быть установлена иерархическая связь между критерием эффективности управления и ресурсами, приданными для достижения главной цели (или другими внутренними либо внешними факторами).

Оптимизация, выполненная на перечисленных принципах, далее будет называться обратной, или оптимизацией на обратных вычислениях. Ее смысл раскроем с помощью более детального описания содержания каждого из сформулированных принципов.

Первый принцип требует изменения направления поиска экстремума целевой функции на противоположный. В общеизвестной постановке решение задачи осуществляется в направлении от ограничений к целевой функции, т.е. в рамках, устанавливаемых ограничениями, отыскивается наилучшее значение целевой функции. Этот принцип требует изменения данного направления таким образом, чтобы первичным был очередной прирост целевой функции, задаваемый пошагово вне зависимости от ограничений. Заданный прирост должен быть обеспечен соответствующими взаимозаменяемыми ресурсами, объемы которых следует искать, исходя из динамически изменяемых ограничений на УР. Это значит, что причина и следствие меняются местами: если в классической постановке первичными были ресурсы, а точнее ограничения на них, и от них зависело значение целевой функции, то в новой постановке первичным является значение целевой функции, под очередной прирост которой отыскивается ресурс.

Второй принцип ориентирован на ликвидацию жесткости в ограничениях на ресурсы. Ограничения на использование того или иного ресурса объективны и устанавливаются исходя из возможностей предприятия, однако в случае возникновения в процессе расчетов дефицита в одном из них должна предусматриваться процедура заимствования, т.е. погашения нехватки одного ресурса за счет другого. Заимствование бывает безвозмездным или условно «платным» (создается система штрафов). В дальнейшем будет рассматриваться безвозмездное заимствование, обеспечивающее замену недостающего ресурса эквивалентным объемом другого.

Возможность замены должна зависеть от факторов, которые, как правило, изменяются в процессе решения задачи. Эти факторы, отражаемые в форме динамических ограничений, в первую очередь зависят от:

- количества обращений за заимствованием к тому или иному ресурсу и объемов уже осуществленного заимствования;
- остатка ресурса после очередного заимствования;
- коэффициента приоритетности использования или заимствования того или иного ресурса.

Классические модели предлагают статичный взгляд на пути к достижению поставленной цели. Излагаемый же принцип требует обеспечения гибкости и оперативности в выборе путей ее достижения. При этом должны быть обеспечены варианты путей достижения целей. Например, в одном квартале можно стремиться к повышению прибыли за счет увеличения выручки и снижения затрат, а в другом, наоборот, за счет увеличения прибыли и увеличения затрат. Но это будет уже другая цель, требующая при классическом подходе своей постановки.

Поэтому **третий принцип** требует обеспечения возможности в выборе и использовании различных путей в достижении цели управления, каждый из которых указывается лицом, принимающим решение исходя из сложившейся ситуации.

Для иллюстрации данного принципа обратимся к примеру. Пусть оборотные средства на предприятии рассчитываются по формуле:

$$O = Ден + Гот + Нез + Зап,$$

где O — общий объем оборотных средств; *Ден* — денежные средства; *Гот* — готовая продукция; *Нез* — незавершенное производство; *Зап* — материальные запасы (страховой, текущий и пр.). Так же как и в [2], пути достижения целей будем указывать с помощью знаков: плюс — увеличение, минус — уменьшение. Если целью служит увеличение оборотных средств, то часть вариантов путей ее достижения может быть следующей:

$$O^+ = Ден^+ + Гот^+ + Нез^+ + Зап^-$$

$$O^+ = Ден^+ + Гот^+ + Нез^- + Зап^+$$

$$O^+ = Ден^+ + Гот^- + Нез^+ + Зап^-$$

и т.д.

Такой подход невозможно реализовать классическими методами оптимизации экономических решений.

Четвертый принцип требует воспроизведения всех известных связей между главной (интегральной) целью управления и приданными ресурсами путем проведения промежуточных расчетов по каждой связи. Получаемые промежуточные показатели являются ни чем иным как плановыми индикаторами для различных структурных подразделений предприятия. Реализация данного принципа дает возможность определить управленческие предписания, предназначенные для разных структурных подразделений. Воспроизвести все промежуточные расчеты можно с помощью иерархических структур, в узлах которых находятся показатели с соответствующими формулами расчетов. На *рис. 3* приведен фрагмент дерева целей,

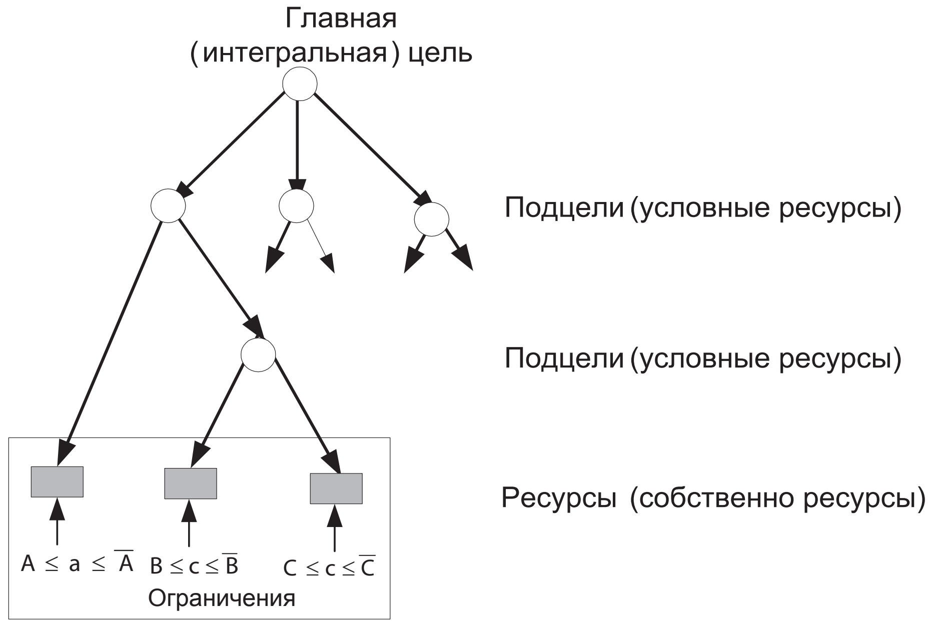

Рис. 3. **Графическое представление иерархической зависимости целей**

демонстрирующий зависимость интегральной цели от подчиненных целей, и, в конечном счете, от ресурсов.

Закладывая многоступенчатые расчеты в качестве одного из принципов, уместно вернуться к уже цитируемому исследованию акад. В.И. Арнольда, в котором автор предостерегает от многоступенчатости в управлении: «Многоступенчатое управление, описываемое нашей моделью $n > 3$, неустойчиво. Двухступенчатое управление приведет к периодическим колебаниям, но не вызовет катастрофического нарастания колебаний, происходящего при трех- и более ступенчатом управлении. Настоящую устойчивость обеспечивает только одноступенчатое управление, при котором управляющее лицо более заинтересовано в интересах дела, чем в поощрении со стороны начальства» [1, с. 19].

Именно последний принцип, требующий иерархического отражения связей между критерием управления и ресурсами, может быть связан с многоступенчатостью управления. Многоступенчатость расчетов не является прямым следствием многоступенчатости управления. Проблема многоступенчатости управления является темой иного исследования и здесь не рассматривается.

4. МЕТОД ОБРАТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Для того чтобы показать сущность процесса оптимизации на обратных вычислениях, предварительно введем в рассмотрение два арифметических n-мерных пространства. Первое задано n-мерным прямоугольным параллелепипедом, множество точек которого $\bar{M}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n,}\right)$ определяется неравенствами вида:

$$\bar{r}_1 \le x_1 \le \bar{R}_1,\ \bar{r}_2 \le x_2 \le \bar{R}_2,\ \ldots, \bar{r}_n \le x_n \le \bar{R}_n.$$

Координаты $\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n,}\right)$ соотнесем с ресурсами, имеющимися на предприятии, объемы которых ограничены величинами $\bar{r}_{i,} \bar{R}_i$. Точка с координатами $\bar{M}\left(x_1^0 = \bar{r}_1, x_2^0 = \bar{r}_2, \ldots, x_n^0 = \bar{r}_n,\right)$ будет называться исходной точкой. Пространство $\bar{M}$ есть не что иное как пространство ограничений на ресурсы.

Второе пространство $M\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n,}\right)$ также является n-мерным параллелепипедом, точки которого определяются следующими координатами:

$$\bar{r}_1 \le x_1 \le R_1,\ \bar{r}_2 \le x_2 \le R_2,\ \ldots, \bar{r}_n \le x_n \le R_n,$$

где $R_i \le \bar{R}_i$.

Нижние границы пространств M и $\bar{M}$ совпадают, но так как $\bar{r}_1 \le \bar{R}_1,\ \bar{r}_2 \le \bar{R}_2, \ldots, \bar{r}_n \le \bar{R}_n$, M может рассматриваться в качестве подпространства $\bar{M}$. Это значит, что исходные точки М: $\bar{M}\left(x_1^0 = \bar{r}_1, x_2^0 = \bar{r}_2, \ldots, x_n^0 = \bar{r}_n,\right)$ и $\bar{M}\left(x_1^0 = \bar{r}_1, x_2^0 = \bar{r}_2, \ldots, x_n^0 = \bar{r}_n,\right)$ совпадают.

Подпространство M может расширяться и при отсутствии каких-либо ограничений достигать в своих размерах объема пространства $\bar{M}$. Его так же, как и $\bar{M}$, соотнесем с ресурсами, но не с ограничениями на них, а с потребностями в них, вычисленными на различных шагах решения задачи.

Введенные пояснения позволяют сформулировать следующую задачу:

найти такие координаты точки в пространстве $\bar{M}$, *которые обеспечат экстремум функционала F (x) -> extr на базисе* $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n,}\right)$.

Метод ее решения базируется на обратных вычислениях, подробное изложение которого можно найти в [2, 3]. Но если в обычных задачах формирования решений данный метод используется один раз, то в задачах оптимизации повторяется многократно. Вначале осуществляется последовательное добавление приростов (положительных или отрицательных) к исходному значению функционала $F(x^0)$, равных $\pm\vartriangle F\left(x\right)$, и выполнение расчетов после каждого добавления. С помощью последних устанавливаются искомые приросты переменных базиса (ресурсов):

для 1-й итерации:

$$x_1^1 = x_1^0 \pm \vartriangle x_1^0, x_2^1 = x_2^0 \pm \vartriangle x_2^0, \ldots, x_n^1 = x_n^0 \pm \vartriangle x_n^0,$$

для 2-й итерации:

$$x_1^2 = x_1^1 \pm \vartriangle x_1^1, x_2^2 = x_2^1 \pm \vartriangle x_2^1, \ldots, x_n^2 = x_n^1 \pm \vartriangle x_n^1,$$

для m-й итерации:

$$x_1^m = x_1^{m-1} \pm \vartriangle x_1^{m-1}, x_2^m = x_2^{m-1} \pm \\ \pm \vartriangle x_2^{m-1}, \ldots, x_n^m = x_n^{m-1} \pm \vartriangle x_n^{m-1}.$$

После 1-й итерации полученные приросты определяют новое пространство M_1, координаты которого либо находятся в границах $\overline{r_i} \le x_i^0 \pm \vartriangle x_i^0 \le \bar{R}_i$, либо нет. Если новое пространство находится в границах $\bar{M}$, то процесс продолжается путем добавления нового прироста $\pm\vartriangle F\left(x\right)$ и вычисления новых величин $\pm\vartriangle x$.

Процесс повторяется до тех пор, пока очередное пространство M_i не выйдет за пределы пространства $\bar{M}$, т.е. $x_i \pm \vartriangle x_i \left\{\overline{r_n}, \bar{R}_n\right\}$. Это свидетельствует о возникновении дефицита в одном или нескольких ресурсах. Если замена недостающего ресурса возможна, т.е. динамически устанавливаемые ограничения на взаимозаменяемость ресурсов операцию разрешают, то происходит перекладывание части нагрузки с одного ресурса на другой. Процедура улучшения функционала повторяется до тех пор, пока не закончатся ресурсы.

Результаты решения задачи, обеспечивающие оптимальное значение функционала $F^{опт}\left(x\right)$, будут находиться между двумя пространствами $\bar{M}$ и M_i что можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{r_1} &\le x_1^0 \pm \sum_{k=1}^{m} \vartriangle x_1^k \pm \sum_{k=1}^{m_1} z_1^k = x_1^{опт} \le \bar{R}_1, \\ \overline{r_2} &\le x_2^0 \pm \sum_{k=1}^{m} \vartriangle x_2^k \pm \sum_{k=1}^{m_2} z_2^k = x_2^{опт} \le \bar{R}_2, \\ \overline{r_n} &\le x_n^0 \pm \sum_{k=1}^{m} \vartriangle x_n^k \pm \sum_{k=1}^{k} z_n^k = x_n^{опт} \le \bar{R}_n, \end{aligned} \qquad (1)$$

где x_i^0 — исходное значение i-й искомой переменной;

$\vartriangle x_i^k$ — прирост i-го ресурса, полученный на k-й итерации;

z_i^k объем i-го ресурса, использованного для покрытия дефицита в других ресурсах на k-й итерации;

m — количество итераций;

m_k — количество заимствований в k-м ресурсе.

Второй принцип, ориентированный на ликвидацию жесткости в ограничениях на ресурсы, требует отделения динамических ограничений от статических. Динамические ограничения устанавливаются на каждой итерации и касаются тех ресурсов, которые могут быть использованы для покрытия возникшего дефицита. Для рассмотрения формулы, предназначенной для расчета заимствования ресурсов в рамках каждой итерации, введем величину z_{ijk} — объем заимствования в k-м ресурсе, необходимого для замены j-го ресурса на i-й итерации. Это позволяет ввести формулу для расчета динамичных ограничений на заимствования в рамках каждой итерации, которая имеет следующий вид:

$$\overline{z}_{ij} = \left(\frac{\overline{R}_j - r_j^0 - \sum_{i=1}^{n} \triangle x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_k} z_{ijk}}{n_k}\right)\alpha_k,$$

$$j = 1,\ldots,m, \qquad (2)$$

где $\overline{z}_{ij}$ — разрешенный объем заимствования в k-м ресурсе на j-й итерации;

$\triangle x_{ij}$ — прирост j -го ресурса, рассчитанного с помощью обратных вычислений для i-й итерации;

z_{ijk} — объем заимствования в k-м ресурсе, предназначенном для замены j-го ресурса на i-й итерации;

$\overline{R}_j, r_j^0$ — ограничения на использование j-го ресурса и его первоначальный объем соответственно;

α_k— коэффициент приоритетности в использовании или в заимствовании k-го ресурса;

n_k — количество осуществленных заимствований в j-м ресурсе;

n — количество выполненных итераций;

m — общее количество ресурсов, приданных для достижения цели.

Коэффициент a_k в простейшем случае является коэффициентом приоритетности в использовании ресурса. Но в общем случае использование ресурса и его заимствование не одно и то же. Поэтому вместо a_k, если того требует точность решения задачи, можно указать коэффициент приоритетности заимствования $\overline{\alpha}_k$.

В последней формуле динамика ограничений зависит от двух переменных: общего объема уже заимствованного ресурса $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_k} z_{ijk}$ и количества уже осуществленных заимствований (n_k), а также нескольких дополнительных параметров: коэффициента приоритетности в использовании или заимствовании ресурса ($\alpha_j, \overline{\propto_j}$) и ограничений на использование ресурсов ($\overline{R}_j, r_j^0$).

Для коэффициента приоритетности (α_k) также можно указать факторы, от которых он зависит (например, объема ресурса, оставшегося после последнего заимствования). Далее, если этого потребует точность результатов расчета, будем считать, что данный коэффициент зависит от числа обращений за заимствованиями к определенному ресурсу (n_k), что можно выразить следующим образом:

$$\propto_j^* = \frac{\propto_j}{n_k}.$$

При этом поставим верхний предел числу n_k, ограничивающему количество обращений к k-му ресурсу за заимствованием:

$$n_k \le \overline{n_k}.$$

Смысл данного ограничения заключается в ужесточении выдачи заимствований, так как основная цель применения ресурса состоит в его прямом использовании по назначению, а не покрытии дефицита в других ресурсах.

Если на i-й итерации необходимый для покрытия дефицита объем k-го ресурса меньше динамически установленного ограничения на его заимствование, то оно возможно. Это можно записать как

$$z_{ijk} \le \overline{z_{ijk}},$$

где обозначения прежние. В противном случае заимствование не совершается.

Распределение возникшего дефицита будет осуществляться по всем разрешенным на данной итерации ресурсам пропорционально их нормированным коэффициентам приоритетности в использовании или заимствовании и оставшимся объемам. Расчет выполняется по формуле:

$$z_{ijk} = \delta_k \triangle z_{idef(j)} \frac{V_{0k} - V_{ik}}{V_{0k}},$$

где z_{ijk} — часть j-го ресурса, восполняемая за счет k-го ресурса на i-й итерации; δ_k — нормированный коэффициент приоритетности в использовании k-го ресурса;

$z_{idef(j)}$ — дефицит в j-м ресурсе, возникший на i-й итерации;

V_{0k}, V_{ik} — объем k-го ресурса, доступный на i-й итерации (V_{ik}), и его исходный объем (V_{0k}).

Нормирование коэффициента приоритетности осуществляется по общеизвестной формуле [4]:

$$\delta_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i},$$

где δ_k — нормированный коэффициент приоритетности в использовании *k*-го ресурса;

α_k — коэффициент приоритетности в использовании *k*-го ресурса;

n — количество ресурсов, которые могут быть использованы в качестве заменителя.

Динамичность в подходах к достижению цели управления реализуется за счет оперативного указания лицом, принимающим решение, того варианта путей, которые приведут к поставленной цели. Кроме того, устанавливаются приоритеты каждого из путей. В общем виде реализация данного принципа описывается следующим образом:

$$f^{\pm}(x) = f(x_1^{\pm}(\alpha_1), x_2^{\pm}(\alpha_2), \ldots, x_n^{\pm}(\alpha_n)),$$

где знаки ± указывают на направление в изменении того или иного ресурса, а *a* — приоритетность в его использовании. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} \propto_i = 1$ [7].

Изложенные принципы позволяют сформулировать задачу оптимизации, в основе решения которой лежат обратные вычисления. Если для простоты представления воспользоваться лишь тремя переменными, то данная задача приобретает вид:

$$f^{\pm}(x) = f(x_1^{\pm}(\alpha_1), x_2^{\pm}(\alpha_2), x_3^{\pm}(\alpha_3)) \to extr$$

$$\begin{cases} \dfrac{\triangle x_1}{\triangle x_2 \pm \triangle x_3} = \dfrac{\propto}{\beta + \gamma} \\ \dfrac{\triangle x_2}{\triangle x_1 \pm \triangle x_3} = \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma} \\ \dfrac{\triangle x_3}{\triangle x_1 \pm \triangle x_2} = \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta} \\ \sum_{1=1}^{m} \triangle x_{ij} = \overline{x} - x_0,\ j = 1,2,3 \\ z_{ijk} \le \overline{z_{jk}}, k \ne j, k, j \in (x_1, x_{2,} x_{3),} \end{cases}$$

где $\propto, \beta, \gamma$ — коэффициенты приоритетности в достижении целей, измеряемых показателями x_1, x_2, x_3. Остальные обозначения прежние.

Описываемый метод оптимизации можно назвать итерационным, так как в результате выполнения итераций происходит последовательное улучшение целевой функции. Каждая итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. На основе указанного прироста целевой функции осуществляется расчет приростов (отрицательных или положительных) ресурсов с помощью обратных вычислений.

Шаг 2. Выполняется перерасчет приростов в том случае, если обнаружен дефицит в некотором ресурсе, что требует его покрытия за счет других. Если ресурсы не исчерпаны, далее выполняется шаг 1.

На *рис. 4* показано выполнение нескольких итераций. При этом длина горизонтальных линий условно символизирует приоритетность в использовании ресурсов, т.е. чем длиннее линия, тем выше приоритетность, обозначенная как a_k.

В приведенном примере рассматривается шесть ресурсов $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$. Каждый ресурс характеризуется своим начальным $\overline{r_i^0}$ и конечным $\overline{R_i}$ объемами. С помощью символов $\triangle r_{ij}$ обозначены приросты *j*-го ресурса на *i*-й итерации, обусловленные обратными вычислениями.

Согласно рис. 4 первая итерация обеспечена всеми ресурсами, так как $\overline{r_1^0} + \triangle r_{11} < \overline{R_1}$, $\overline{r_2^0} + \triangle r_{12} < \overline{R_2}$, $\overline{r_3^0} + \triangle r_{13} < \overline{R_3}$, $\overline{r_4^0} + \triangle r_{14} < \overline{R_4}$, $\overline{r_5^0} + \triangle r_{15} < \overline{R_5}$, $\overline{r_6^0} + \triangle r_{16} < \overline{R_6}$,

где $\triangle r_{ij}$ — прирост *j*-го ресурса вычисленный на *i*-й итерации.

Далее будем полагать, что заимствование ресурса возможно в том случае, если $\propto_i > 0,5$. Пусть, согласно данному ограничению, заимствование разрешено в следующих ресурсах: r_1, r_4, r_6. В результате выполнения второй итерации получены новые приросты $\triangle r_{21} \div \triangle r_{26}$. Вторая итерация выполнена успешно на всех ресурсах, за исключением двух: не хватило ресурсов $\triangle r_2\, u\, \triangle r_5$, так как $\overline{r_2^0} + \triangle r_{12} + \triangle r_{22} > \overline{R_2}$ и $\overline{r_5^0} + \triangle r_{15} + \triangle r_{15} > \overline{R_5}$. Это свидетельствует о возникновении дефицита в этих ресурсах. Его можно погасить за счет других ресурсов. Выберем наипростейший способ распределения дефицита: разделим его на равные части по числу разрешенных ресурсов для выполнения данной операции. Так как в перечень разрешенных входят r_1, r_4, r_6, поэтому дефицит в ресурсе r_2 разделим на три части: $z_{221}, z_{224}, z_{226}$, где z_{ijk}— часть дефицита, возникшего на *i*-й итерации в *j*-м ресурсе, погашающегося за счет *k*-го ресурса. Динамически устанавливаемые ограничения на заимствование для данной итерации позволяют выполнить эту операцию, так как:

$$\overline{r_1^0} + \vartriangle r_{11} + \vartriangle r_{21} + z_{221} < \overline{Z_{21}}$$

$$\overline{r_4^0} + \vartriangle r_{14} + \vartriangle r_{24} + z_{224} < \overline{Z_{24}} \overline{r_6^0} + \vartriangle r_{16} + \vartriangle r_{26} < \overline{Z_{26}},$$

где $\overline{z}_{ij}$ — разрешенный объем заимствования в *k*-м ресурсе на *j*-й итерации (см. [2]). Кроме ресурса r_2, не хватило также и ресурса r_5. Его нехватка может быть распределена среди ресурсов r_1 и r_6 (ресурс r_4 закончился). Таким образом, вторая итерация закончилась и при этом ресурсы r_1, r_4, r_5 иссякли, а ресурс r_3 к распределению запрещен.

Третья итерация может выполняться лишь на двух ресурсах r_1, и r_6, однако этого не происходит, так как ни того, ни другого не хватает для удовлетворения приростов, требуемых обратными вычислениями, т.е.:

$$\overline{r_1^0} + \vartriangle r_{11} + \vartriangle r_{21} + \vartriangle r_{31} + z_{221} + z_{251} < \overline{R_1}$$

$$\overline{r_6^0} + \vartriangle r_{16} + \vartriangle r_{26} + \vartriangle r_{36} + z_{226} + z_{256} + z_{336} < \overline{R_6}.$$

Таким образом, после двух итераций получен следующий результат:

$$F^{опт}(x) = F(r_1^{опт}, r_2^{опт}, r_3^{опт}, r_4^{опт}, r_5^{опт}, r_6^{опт}),$$

где

$$r_1^{опт} = \overline{r_1^0} + \vartriangle r_{11} + \vartriangle r_{21} + z_{221} + z_{251}$$

$$r_2^{опт} = \overline{r_2^0} + \vartriangle r_{12} + \vartriangle r_{22} - z_{221} - z_{224} - z_{226}$$

$$r_3^{опт} = \overline{r_3^0} + \vartriangle r_{13} + \vartriangle r_{23} - z_{331} - z_{336}$$

$$r_4^{опт} = \overline{r_4^0} + \vartriangle r_{14} - z_{224}$$

$$r_5^{опт} = \overline{r_5^0} + \vartriangle r_{15} + \vartriangle r_{25} - z_{251} + z_{256}$$

$$r_6^{опт} = \overline{r_6^0} + \vartriangle r_{16} + \vartriangle r_{26} + z_{256} + z_{336}.$$

Среди всех ресурсов не до конца использованными являются два, r_1, и r_6 которых равен:

$$r_1^{неисп} = \overline{R}_1 - x_1^{опт} \text{ и } r_6^{неисп} = \overline{R}_6 - x_6^{опт}.$$

Если сравнивать результаты решения данной задачи, полученные традиционным и рассматриваемым методом, то, очевидно, они будут различными, так как ресурсы используются по-разному. На *рис. 5* эта разница представлена графически.

Затемненные поля, указанные на *рис. 5*, демонстрируют, что одни ресурсы сократились, так как были использованы для покрытия дефицита других, а некоторые, наоборот, увеличились за счет иных ресурсов. Затемненными квадратами представлены изменения в объемах ресурсов, а стрелками — пути их перемещения в соответствии с примером, приведенном на *рис. 4.* Можно заметить, что оптимальные результаты *f (x),* полученные традиционным способом, и результаты $\overline{f}(x)$, полученные предлагаемым способом, различны, так как векторы *x* и $\overline{x}$ *не равны.* Кроме того, может быть, что $f(x) > \overline{f}(x)$. Однако в любом случае можно рассчитывать на повышение устойчивости системы, так как:

- установлена реальная связь между общим критерием управления и ресурсами за счет использования иерархической структуры расчетов (пересчитанные УР и СР являются обоснованными предписаниями для структурных подразделений);
- получена возможность оперативного изменения путей достижения главной цели и приоритетов в достижении подцелей лицом, формирующим решение.

Возвращаясь к последнему принципу, который требует полного воссоздания зависимости интегрального критерия от всех иерархически связанных подцелей, следует заметить, что его выполнение влечет за собой решение различных по сложности вариантов задачи обратной оптимизации. Варианты обусловлены количеством уровней в иерархической зависимости цели управления от ресурсов. Здесь возможны следующие варианты [6]:

- одноступенчатые задачи;
- двухступенчатые задачи;
- многоступенчатые задачи.

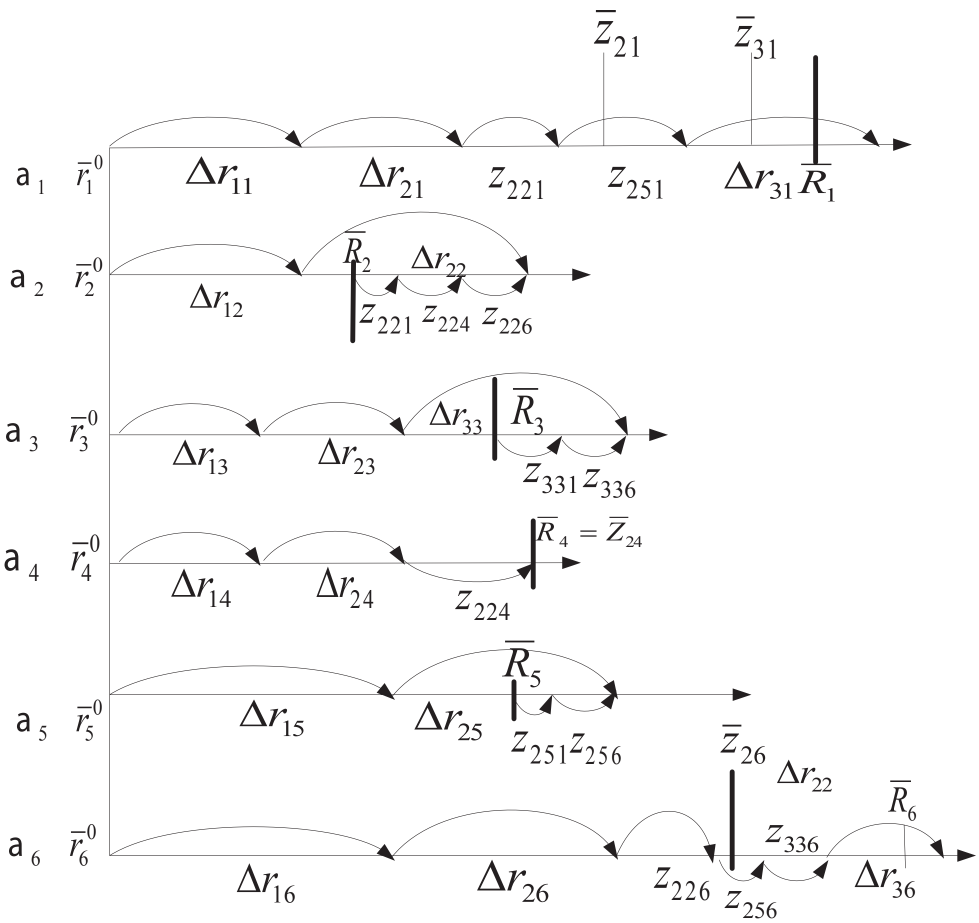

Рис. 4. **Иллюстрация процедуры заимствования ресурсов в процессе улучшения целевой функции**

Одноступенчатые задачи возникают в том случае, если критерий управления, как это имеет место в классических методах оптимизации, непосредственно связан с собственно ресурсами, предназначенными для достижения цели (переменными). Эти задачи наипростейшие и их можно назвать базовыми, так как применяемые для их решения процедуры можно использовать и для более сложных задач.

Двухступенчатые задачи содержат один промежуточный уровень подцелей (УР) между критерием управления и приданными предприятию ресурсами. Для их решения можно применить базовые алгоритмы одноступенчатой оптимизации или алгоритмы сквозного заимствования. Если используются базовые алгоритмы, то двухступенчатая задача превращается во множество одноступенчатых, результаты которых, являясь частными, после дополнительной обработки позволяют получить общий результат.

Сквозные алгоритмы более сложны, но их применение позволяет получить результаты, эффективность которых выше по сравнению с синтезом одноступенчатых решений, так как в расчетах одновременно рассматриваются все имеющиеся ресурсы, а не их отдельные группировки. Так как двухступенчатая задача содержит один промежуточный уровень между целевой функцией и ее переменными, рассчитываемый с помощью соответствующих формул, целевая функция превращается в функционал с базисом, переменные которого соответствуют ресурсам [7, 8].

Одно- и двухступенчатые задачи являются частными случаями многоступенчатых. Решение последних заключается в декомпозиции задачи на множество одноступенчатых, а затем поочередном слиянии полученных результатов после обработки каждой ступени. В итоге можно получить результат, который будет хуже того, который можно было бы получить на основе сквозного алгоритма. Применение

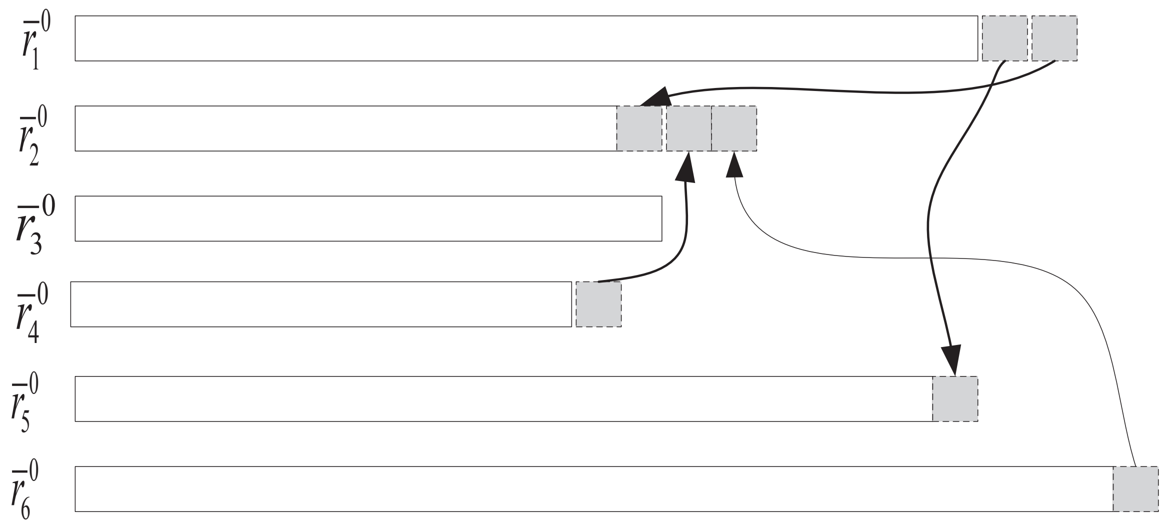

Рис. 5. **Иллюстрация различий межу результатами решения оптимизационной задачи традиционным и излагаемым методом**

последнего пока затруднительно из-за быстрого возрастания сложности в процессе его построения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели. — М.: МЦНМО, 2000. — 32 с.
2. *Одинцов Б.Е.* Обратные вычисления в формировании экономических решений. — М.: Финансы и статистика, 2004. — 192 с.
3. *Одинцов Б.Е.* Оптимизация экономических решений с помощью обратных вычислений. — М.: Компания спутник+, 2006. — 40 с.
4. *Поспелов Г.С, Ириков В.А.* Программно-целевое планирование и управление. — М.: Сов. Радио, 1976. — 441 с.
5. *Одинцов Б.Е.* Формирование управляющих предписаний в экономике. URL: http://obe45.ru/metody/determinirovannye-vozdeistviya/ (дата обращения: 18.02.2013).
6. *Романов А.Н., Одинцов Б.Е.* Советующие информационные системы в экономике. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. — 487 с.
7. Информационные ресурсы и технологии в экономике / Под ред. *Б.Е. Одинцова, А.Н. Романова.* — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2013. — 462 с.
8. *Баканов М.И., Шеремет А.Д.* Теория анализа хозяйственной деятельности. — М.: Финансы и статистика, 1987. — 287 с.

REFERENCES

1. *Arnold V.*I. «Rigid» and «Soft» Mathematical Models. — MTsNMO, 2000. — 32 pages *(in Russian).*
2. *Odintsov B. Ye*. Inverse Calculations in Making Economic Decisions. — Moscow: Finansy i Statistika (Finance and Statistics). 2004. — 192 pages *(in Russian).*
3. *Odintsov B. Ye*. Optimization of Economic Solutions Using Inverse Calculations. — M.: Kompania Sputnik+ Publishers, 2006. — 40 pages (*in Russian).*
4. *Pospelov G.S., Irikov V.A.* Program-Oriented Planning and Management. — M.: Sov. Radio, 1976. — 441 pages (*in Russian).*
5. *Odintsov B. Ye.* Formation of Control Regulations in Economy. URL: http://obe45.ru/metody/determinirovannye-vozdeistviya/ (accessed date: 18.02.2013).
6. *Romanov A.N., Odintsov B. Ye.*. Relevant Information Systems in Economics. — Moscow: UNITY-DANA, 2000. — 487 pages *(in Russian).*
7. Information Resources and Technologies in Economics: / Edited by B. Ye. Odintsov, A.N. Romanov. — M.: Manual: INFRA-M, 2013. — 462 pp. *(in Russian).*
8. *Bakanov M.I., Sheremet A.D.* Theory of the Economic Activity Analysis. — Moscow: Finansy i Statustika (Finance and Statistics), 1987. — 287 pages *(in Russian).*