

DOI: 10.26794/2587-5671-2026-30-3-214-229

УДК 336.763(045)

JEL G11, G12, G17, G32

Исследование шкал стохастического ранжирования финансовых рисков различного уровня катастрофичности

В.Б. Минасян

РАНХиГС при Президенте РФ, Москва, Российская Федерация

АННОТАЦИЯ

Понятие о стохастическом порядке между случайными величинами сформировалось и развивалось в науке с середины XX в., но лишь в последнее десятилетие эти понятия проникли в приложения по риск-менеджменту и в актуарную область, превратившись в активно развивающуюся область, позволяющую сравнивать сами факторы риска как случайные величины и уровень связанных с ними опасностями (рисками). **Целью** данной работы является разработка рекомендаций по решению проблемы сравнения различных рисков и предложение методов такого сравнения для рисков различной степени катастрофичности. Исследуются отношения стохастического и дисперсионного порядка во множестве рисков. В **результате** проводится исследование данных порядков с помощью мер риска VaR , а также мер риска $VaR^{(t)}$ (VaR в степени t), введенных в научный обиход в последние годы. Исследуется описание данных порядков с применением **метода** стоп-лосс преобразования риска, а также **метода** ставки опасности. Кроме того, в работе для известных примеров распределений потерь, которые находят широкие приложения в риск-менеджменте и актуарной науке, получены простые способы, позволяющие сравнивать риски, подчиняющиеся этим распределениям, выражаемые через параметры распределений. Результаты и методы данной работы могут представлять интерес как практикам, так и ученым, занимающимся проблемами риск-менеджмента и актуарной областью.

Ключевые слова: стохастический порядок; дисперсионный порядок; стоп-лосс преобразование риска; ставка опасности; мера риска VaR ; мера риска VaR в степени t ; спреды VaR и VaR в степени t

Для цитирования: Минасян В.Б. Исследование шкал стохастического ранжирования финансовых рисков различного уровня катастрофичности. *Финансы: теория и практика*. 2026;30(3):214-229. DOI: 10.26794/2587-5671-2026-30-3-214-229

ORIGINAL PAPER

The Study of Stochastic Ranking Scales for Financial Risks of Different Levels of Catastrophicity

V.B. Minasyan

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

The concept of stochastic order between random variables has been formed and developed in science since the middle of the 20th century. However, it was only in the last decade that these concepts began to penetrate into risk management applications and into the actuarial field. This has made it possible for them to become an actively developing area, allowing us to compare the risk factors themselves, as well as the level of hazards (risks) associated with them. **The purpose** of this work is to develop recommendations for solving the problem of comparing various risks and to propose methods for comparing risks with different degrees of catastrophicity. The relations of stochastic and dispersion orders in a set of risks are investigated. As **a result**, a study of these orders is carried out using risk measures VaR , as well as risk measures $VaR^{(t)}$ (VaR to the power of t), introduced into scientific use in recent years. The description of these orders is analyzed using the stop loss **method** of risk transformation, as well as the danger rate **method**. In addition, in this study, for well-known examples of loss distributions are given that find wide application in risk management and actuarial science. Simple methods are obtained to allow one to compare risks under these distributions, which are expressed through the parameters of these distributions. The results and methods presented in this work may be of interest to both practitioners and researchers involved in the problems of risk management and the actuarial fields.

Keywords: stochastic order; dispersion order; stop loss risk transformation; danger rate; risk measure VaR ; risk measure VaR to the power of t ; spreads VaR and VaR to the power of t

For citation: Minasyan V.B. The study of stochastic ranking scales for financial risks of different levels of catastrophicity. *Finance: Theory and Practice*. 2026;30(3):214-229. DOI: 10.26794/2587-5671-2026-30-3-214-229

© Минасян В.Б., 2026

ВВЕДЕНИЕ

Благодаря своим познаниям в статистике, финансах и бизнесе, риск-менеджеры оценивают риски и помогают создать политику, минимизирующую риск и его финансовое влияние на компании и клиентов. Одной из основных функций риск-менеджеров является оценка рисков и формулировка политики, которая сводит к минимуму стоимость этого риска. По этой причине риск-менеджеры необходимы бизнесу.

Сравнение рисков лежит в самой сути профессии риск-менеджера. Любой бизнес сталкивается с различными рисками, и риск-менеджер вынужден расставлять эти риски по какой-то шкале с целью дальнейшего управления ими. Есть две причины, по которым один риск, представляющий собой случайную финансовую потерю, может считаться предпочтительнее другого. Одна из них — другой риск больше, вторая — у другого риска более толстый хвост распределения вероятностей потерь. Более толстый хвост означает, что вероятность экстремальных значений риска больше, что делает риск с равным средним значением менее привлекательным, потому что он более распространен и, следовательно, менее предсказуем. Однако понятия «менее толстый хвост» и «более толстый хвост» требуют уточнения. Ведь трудно рассчитывать, что значения одного риска (случайной величины), т.е. его реализации во всех мыслимых обстоятельствах, будут всегда меньше значений другого риска (случайной величины). Но с точки зрения возможных значимых (в определенном смысле) реализуемых потерь один риск может быть предпочтительнее другого. Толщину хвоста также можно измерять с помощью различных измерителей и это также может привести к различным шкалам сравнения рисков.

Таким образом, когда мы можем измерить риск, связанный с различными случайными перспективами, наша цель состоит в том, чтобы формализовать интуитивную идею о том, что одна случайная величина (риск) более опасна, чем другая. Конечно, мы могли бы основывать свои сравнения на одной мере риска и полном порядке между случайными величинами. Однако результат этого подхода является слишком грубым, и мы предпочитаем основывать свое сравнение на широком диапазоне мер риска. Это приводит к различным частичным порядкам среди случайных величин, представляющих риски, называемым стохастическими порядками.

Грубо говоря, стохастический порядок — это отношение порядка, которое допускает сравнивать вероятностные измерения.

Самый простой способ ранжировать рискованные ситуации — вычислить какую-то меру риска и упорядочить случайные перспективы в соответствии со значениями данной меры для перспектив. Однако во многих ситуациях, даже если мера риска разумна в рассматриваемом контексте, например VaR и ES , значения связанных с ними параметров (например, доверительные вероятности для VaR и ES , функции искажения для мер риска, искажения ожидания и т.д.) не определяются однозначно решаемой проблемой. Поэтому риск-менеджеры могут желать гораздо большего, чем простое сравнение по одной конкретной мере риска: они могут просить о том, чтобы риск был более благоприятным по любой из всех заданных мер риска. Это создает частичный порядок (а не общий, т.е. риск-менеджер больше не будет иметь порядка для всех пар рисков), называемый стохастическим.

Так называемое стохастическое доминирование, бесспорно, является хорошо известным и представляется наиболее интуитивно понятным стохастическим порядком. Оно было введено еще в Lehmann [1] и проанализировано Камае и др. [2]. Тем не менее в последние десятилетия появилось большое количество других порядков, в основном на основе мотивации различных областей применения (статистика, теория очередей, теория надежности, экономика, биоматематика, актуарная наука, физика и т.д.). Они породили огромное количество литературы, кульминацией которой стала библиография в Mosler, Scarsini [3] и книги Shaked, Shantikumar [4], и Müller, Stoyan [5].

В последние десятилетия этот интерес вырос до такой степени, что частичные порядки стали одним из важнейших инструментов для сравнения рискованности различных случайных ситуаций. Интересные актуарные применения стохастических порядков рассматриваются в книгах Goovaerts и др. [6] и Kaas и др. [7].

В данной работе мы продолжаем изучение некоторых частичных порядков во множестве рисков с применением как хорошо известной меры риска VaR , так и с помощью относительно нового семейства мер риска « VaR в степени t » (см. Минасян [8, 9]).

ОТНОШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОРЯДКА МЕЖДУ РИСКАМИ

Частичные порядки между функциями распределения

Большинство отношений порядка, которые мы рассматриваем в этой работе, — это частичные порядки на множестве функций распределения. Давайте уточним это понятие.

Определение 1

Пусть Ψ — множество одномерных функций распределения различных случайных величин, представляющих факторы риска, которыми мы интересуемся. Двоичное отношение, которое мы будем обозначать $(\leq)$, является частичным порядком на Ψ , если для любых элементов — функций распределения случайных величин X, Y и Z : F_X, F_Y и F_Z справедливы следующие свойства:

(i) если $F_X \leq F_Y$ и $F_Y \leq F_Z$, тогда $F_X \leq F_Z$ (транзитивность);

(ii) $F_X \leq F_X$ (рефлексивность);

(iii) если $F_X \leq F_Y$ и $F_Y \leq F_X$, тогда $F_X \equiv F_Y$ (антисимметрия).

Если, кроме того, для любой данной пары F_X и F_Y элементов Ψ либо $F_X \leq F_Y$ или $F_Y \leq F_X$, то такой порядок считается полным порядком.

Хотя используемые отношения порядка часто определяются на множествах функций распределения, часто удобно не различать отношение порядка для функций распределения и соответствующее отношение для случайных величин.

Расширяя обозначение, мы пишем $X \leq Y$, но на самом деле мы имеем в виду $F_X \leq F_Y$. Другими словами, когда мы говорим, что риск X меньше риска Y в отношении стохастического порядка $\leq$, мы фактически утверждаем, что этот порядок справедлив для соответствующих функций распределения этих рисков. Поэтому здесь совместное распределение X и Y не имеет значения, важное значение имеют только их одномерные распределения. Если $X \leq Y$, то $X \leq \tilde{Y}$ также справедливо для любой случайной величины $\tilde{Y}$ с тем же одномерным распределением, что и Y .

В таких ситуациях мы не должны предполагать, что сравниваемые случайные величины определены на одинаковом вероятностном пространстве. Однако тогда остается вопрос: можем ли мы построить версии представляющих интерес случайных величин, удовлетворяющие некоторым дополнительным свойствам на том же вероятностном пространстве?

Стохастическое доминирование и VaR

Для сравнения пары рисков X и Y кажется естественным прибегнуть к концепции VaR и считать X менее опасной, чем Y , если

$$VaR[X, p_0] \leq VaR[X, p_0]$$

для некоторого заданного уровня доверительной вероятности p_0 . Однако иногда трудно выбрать такое p_0 , которое в точности соответствует вашим опасениям по отношению к данным рискам, и возможно, что

$$VaR[X, p_0] \leq VaR[X, p_0] \text{ и } VaR[X, p_1] \geq VaR[Y, p_1]$$

одновременно для двух уровней доверительных вероятностей p_0 и p_1 . Поэтому представляется разумным принять следующий критерий: мы размещаем X перед Y (он менее опасен), если VaR для X меньше, чем соответствующие VaR для Y , для любого уровня доверительной вероятности p .

Определение 2

Пусть X и Y — две случайные величины. Тогда говорят, что X не больше Y в смысле стохастического доминирования, и обозначают это как $X \leq_{ST} Y$, если неравенство $VaR[X, p] \leq VaR[Y, p]$ удовлетворено для всех $p \in [0, 1]$.

Начнем с нескольких простых, но важных замечаний.

Замечание 1

Сравнение $X \leq_{ST} Y$ справедливо тогда и только тогда, если неравенство $F_X(x) \geq F_Y(x)$ выполняется при всех $x \in R$.

Доказательство этого факта очевидным образом следует из определения меры риска VaR .

Замечание 2

Если $Pr[X \leq Y] = 1$, то $X \leq_{ST} Y$.

(Здесь и далее $Pr[A]$ обозначает вероятность события A).

Доказательство.

Из $Pr[X \leq Y] = 1$ следует, что $F_X(x) \geq F_Y(x)$ для любого x .

Поэтому неравенство $VaR[X, p] \leq VaR[Y, p]$ удовлетворено для всех $p \in [0, 1]$, а значит, $X \leq_{ST} Y$.

Замечание 3

Очевидно, что сравнение $X \leq_{ST} Y$ справедливо тогда и только тогда, если $-Y \leq_{ST} -X$.

Справедливо и следующее утверждение, доказанное Каас и др. [10].

Утверждение 1

Две случайные величины X и Y удовлетворяют соотношению $X \leq_{ST} Y$ тогда и только тогда, если существуют случайные величины $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ такие, что $X = {}_d\tilde{X}$ и $Y = {}_d\tilde{Y}$ и при этом $Pr[X \leq Y] = 1$. (Доказательство см. Каас и др. [10]).

Здесь обозначение $X = {}_d\tilde{X}$ означает, что X и $\tilde{X}$ совпадают по распределению.

Стохастическое доминирование и соответствующие свойства используются в современном страховании при определении уровней премий при страховании различных рисков. В риск-ме-

неджменте используется при определении очередности (приоритетности) управления рисками, а также при определении средств, выделяемых для управления тем или другим риском.

При перестраховании комплекса рисков эти методы используются для определения перестраховочного уровня, на котором будет реализовываться перестрахование каждого из рисков.

Стандартные ссылки по стохастическому порядку $\leq_{ST}$, содержащие, в том числе, и приложения — это книги Lehmann [11], Marshall, Olkin [12], Ross [13] и Stoyan [14].

Примеры стохастического доминирования для рисков с различными функциями распределения

Пример 1. Риски с равномерным распределением потерь.

Обозначим множество случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[a, b]$ через $Uni[a, b]$. И рассмотрим два риска X и Y , причем $X \in Uni[a, b]$ а $Y \in Uni[c, d]$.

В этом случае можно доказать (см. Приложение 1) справедливость следующего предложения.

Предложение 1

Пусть имеем два риска X и Y , причем $X \in Uni[a, b]$, а $Y \in Uni[c, d]$.

Тогда соотношение $X \leq_{ST} Y$ выполняется тогда и только тогда, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $b \leq c$, т.е. если правый конец отрезка $[a, b]$ находится левее левого конца отрезка $[c, d]$;
- 2) $b \geq c$, $b - a \geq d - c$ и $d \geq b$, т.е. если длина отрезка $[a, b]$ больше длины отрезка $[c, d]$, левый конец отрезка $[c, d]$ находится правее правого конца отрезка $[a, b]$, а правый конец отрезка $[c, d]$ находится правее правого конца отрезка $[a, b]$.
- 3) $b \geq c \geq a$, $b - a \leq d - c$, т.е. если длина отрезка $[a, b]$ меньше длины отрезка $[c, d]$, а левый конец отрезка $[c, d]$ находится внутри отрезка $[a, b]$.

Пример 2. Риски со сдвинутым экспоненциальным распределением потерь.

Обозначим множество случайных величин со следующей функцией распределения:

$$F(x) = 1 - \exp(-k(x-a)), \text{ если } x \geq a \\ F(x) = 0, \text{ в других случаях,}$$

где $k > 0$, а $a \in R$ через $Exp(k, a)$ (в частности, когда $a = 0$, получается обычное экспоненциальное распределение с параметром $k > 0$). И рассмотрим два риска X и Y , причем $X \in Exp(k_1, a_1)$, а $Y \in Exp(k_2, a_2)$.

Получим сначала выражение для $VaR[X, p]$.

Согласно определению $VaR[X, p], p = Pr[X < VaR[X, p]] = 1 - \exp(-k(VaR[X, p] - a))$, значит, $1 - p = \exp(-k(VaR[X, p] - a))$, откуда следует, что

$$VaR[X, p] = a - \frac{\ln(1-p)}{k}. \quad (1)$$

Соотношение $X \leq_{ST} Y$ эквивалентно неравенству $VaR[X, p] \leq VaR[Y, p]$ для всех p из интервала $[0, 1]$, что, согласно формуле (1), эквивалентно выполнению неравенства

$$a_1 - \frac{\ln(1-p)}{k_1} \leq a_2 - \frac{\ln(1-p)}{k_2} \quad (2)$$

при любых p из $[0, 1]$.

Выберем, в частности, $p = 0$, тогда из неравенства (2) получим $a_1 \leq a_2$.

Однако тогда неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \leq \frac{a_1 - a_2}{\ln(1-p)}.$$

Но несложно понять, что правая часть данного неравенства представляет собой функцию переменной p , которая принимает лишь положительные значения, заполняя интервал $(0, +\infty)$.

Значит, для выполнения неравенства (2) при всех p из интервала $[0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \leq 0 \text{ или } k_2 \leq k_1.$$

Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 2

Пусть имеем два риска X и Y , причем $X \in Exp(k_1, a_1)$, а $Y \in Exp(k_2, a_2)$.

Тогда соотношение $X \leq_{ST} Y$ выполняется только в том случае, если выполнены следующие условия: $a_1 \leq a_2$ и $k_2 \leq k_1$.

Пример 3. Риски с нормальным распределением потерь.

Обозначим множество случайных величин с нормальным распределением потерь с параметрами m и s через $Nor(m, s)$.

И рассмотрим два риска X и Y , причем $X \in Nor(m_1, s_1)$, а $Y \in Nor(m_2, s_2)$.

Как известно (см., например, [14]), если $X \in Nor(m, s)$, то

$$VaR[X, p] = m + k_p s,$$

где k_p — квантиль стандартного нормального распределения с доверительной вероятностью p .

Соотношение $X \leq_{ST} Y$ эквивалентно неравенству $VaR[X, p] \leq VaR[Y, p]$ для всех p из интервала $[0, 1]$. Что эквивалентно выполнению неравенства $m_1 + k_p s_1 \leq m_2 + k_p s_2$ при любых p из интервала $[0, 1]$. Отсюда следует, что

$$k_p [s_1 - s_2] \leq m_2 - m_1. \quad (3)$$

Рассмотрим первый случай: 1) $s_1 > s_2$, тогда неравенство (3) эквивалентно выполнению неравенства

$$k_p \leq \frac{m_2 - m_1}{s_1 - s_2}$$

при любых p из интервала $[0, 1]$, что невозможно, исходя из свойств квантиля стандартного нормального распределения.

Рассмотрим второй случай: 2) $s_1 < s_2$, тогда неравенство (3) эквивалентно выполнению неравенства

$$k_p \geq \frac{m_2 - m_1}{s_1 - s_2}$$

при любых p из интервала $[0, 1]$, что также невозможно, исходя из свойств квантиля стандартного нормального распределения.

Рассмотрим третий случай: 3) $s_1 = s_2$, тогда из неравенства (3) получаем $m_2 \geq m_1$.

Таким образом, справедливо следующее предложение 3.

Предложение 3

Пусть имеем два риска X и Y , причем $X \in Nor(m_1, s_1)$, а $Y \in Nor(m_2, s_2)$.

Тогда: если $s_1 \neq s_2$, то риски X и Y стохастически не сравнимы; если $s_1 = s_2$, то $X \leq_{ST} Y$ тогда и только тогда, если $m_2 \geq m_1$.

То есть нормально распределенные риски сравнимы с точки зрения стохастического сравнения, только лишь при равенстве волатильностей этих рисков и в этом случае один из рисков не превосходит другой, если ожидаемый убыток по нему не превосходит, ожидаемый убыток по второму.

Пример 4. Риски с треугольным распределением потерь.

Обозначим множество случайных величин с треугольным распределением на отрезке $[a, b]$ и модой m через $Tr[a, b, m]$. И рассмотрим два риска X и Y , где $X \in Tr[a, b, m_1]$ а $Y \in Tr[a, b, m_2]$, причем $m_1 < m_2$.

В этом случае можно доказать (см. Приложение 2) справедливость следующего предложения.

Предложение 4

Пусть имеем два риска X и Y , где $X \in Tr[a, b, m_1]$ а $Y \in Tr[a, b, m_2]$, причем $m_1 < m_2$.

Тогда соотношение $X \leq_{ST} Y$ выполняется в двух случаях:

$$\begin{aligned} &\text{если } m_1 < m_2 \leq a(1-p) + pb; \\ &\text{если } a(1-p) + pb \leq m_1 < m_2. \end{aligned}$$

В третьем же случае, когда

$$m_1 \leq a(1-p) + pb \leq m_2,$$

соотношение $X \leq_{ST} Y$ не выполняется, а доминирование $Y \leq_{ST} X$ может как выполняться, так и нет — в зависимости от соотношения параметров a, b, m_1, m_2 .

Интересно, как отношение стохастического доминирования можно выразить в терминах мер риска « VaR в степени t », $VaR^{(t)}[X, p]$, введенных и исследованных в работе [8] при любом действительном значении $t \geq 1$. Ответ на этот вопрос дается в следующем утверждении:

Утверждение 2

Если $X \leq_{ST} Y$, то неравенство

$$VaR^{(t)}[X, p] \leq VaR^{(t)}[Y, p]$$

справедливо при всех $t \geq 1$ для всех $p \in [0, 1]$.

Если неравенство $VaR^{(t)}[X, p] \leq VaR^{(t)}[Y, p]$ справедливо хотя бы для одного значения $t = t_0 \geq 1$ для всех $p \in [0, 1]$, то $X \leq_{ST} Y$.

Доказательство утверждения см. в Приложении 3.

Из утверждения 2 следует, что меры риска $VaR^{(t)}$ применимы для определения стохастического доминирования рисков. И риск X меньше риска Y в смысле стохастического доминирования, если неравенство $VaR^{(t)}[X, p] \leq VaR^{(t)}[Y, p]$ справедливо хотя бы для одного значения $t = t_0 \geq 1$ для всех $p \in [0, 1]$.

Исходя из этого, естественно ввести определение:

Определение 3. Пусть X и Y — две случайные величины, представляющие соответствующие факторы риска. Тогда говорят, что X меньше Y в смысле стохастического доминирования степени t , и обозначают как $X \leq_{ST^{(t)}} Y$, если неравенство $VaR^{(t)}[X, p] \leq VaR^{(t)}[Y, p]$ удовлетворено для всех $p \in [0, 1]$.

Тогда утверждение 1 можно переформулировать следующим образом:

Утверждение 3

Если $X \leq_{ST} Y$, то сравнение $X \leq_{ST^{(t)}} Y$ справедливо при всех $t \geq 1$.

Если сравнение $X \leq_{ST^{(t)}} Y$ справедливо хотя бы для одного значения $t = t_0 \geq 1$, то $X \leq_{ST} Y$.

Стохастическое доминирование может также характеризоваться относительными обратными функциями распределения, определенными как

$$x \rightarrow \text{VaR}[X, F_Y(x)].$$

Это не что иное, как VaR от X на уровне доверительной вероятности $p = F_Y(x)$.

В [14] доказано следующее утверждение (предложения 3.3.2 и 3.3.3), представляющее необходимые и достаточные условия стохастического доминирования.

Утверждение 4

Для двух рисков X и Y соотношение $X \leq_{ST} Y$ справедливо тогда и только тогда, если $\text{VaR}[X, F_Y(x)] \leq x$ для всех x .

Пусть X и Y риски с непрерывными функциями распределения. В таком случае соотношение $X \leq_{ST} Y$ справедливо тогда и только тогда, если $F_X(\text{VaR}[Y, p]) \geq p$ для всех $0 < p < 1$.

Комбинируя утверждения 4 и 3, можно сделать вывод, что следующее утверждение верно.

Утверждение 5

Пусть X и Y — случайные величины с непрерывными функциями распределения.

Если выполнено, хотя бы одно из условий:

$$\begin{aligned} \text{VaR}[X, F_Y(x)] &\leq x \text{ для всех } x; \\ F_X(\text{VaR}[Y, p]) &\geq p \text{ для всех } 0 < p < 1, \end{aligned}$$

то сравнение $X \leq_{ST^{(t)}} Y$ справедливо при всех $t \geq 1$.

Если сравнение $X \leq_{ST^{(t)}} Y$ справедливо хотя бы для одного значения $t = t_0 \geq 1$, то одновременно будут выполняться следующие два условия:

$$\begin{aligned} \text{VaR}[X, F_Y(x)] &\leq x \text{ для всех } x; \\ F_X(\text{VaR}[Y, p]) &\geq p \text{ для всех } 0 < p < 1. \end{aligned}$$

В [14] приведено следующее утверждение:

Утверждение 6

Для любых случайных величин X и Y сравнение $X \leq_{ST} Y$ справедливо тогда и только тогда, если выполняется неравенство $r_g[X] \leq r_g[Y]$ для всех мер риска искажения r_g с ненулевой функцией искажения g .

Тогда из утверждения 3 вытекает справедливость следующего утверждения:

Утверждение 7

Для любых случайных величин X и Y сравнение $X \leq_{ST^{(t)}} Y$ справедливо тогда и только тогда,

если выполняется неравенство $r_g[X] \leq r_g[Y]$ для всех мер риска искажения r_g с ненулевой функцией искажения g .

То есть если для некоторого t справедливо сравнение $X \leq_{ST^{(t)}} Y$, то лица, принимающие решение о сравнении рисков на основе $X \leq_{ST^{(t)}} Y$, будут предпочитать риск X по сравнению с риском Y и при любой мере риска искажения r_g с $g \neq 0$ и наоборот.

В [14] приведено следующее утверждение (утверждение 3.3.4):

Утверждение 8

Для любых случайных величин X и Y сравнение $X \leq_{ST} Y$ справедливо тогда и только тогда, если выполняется неравенство $E[v(X)] \leq E[v(Y)]$ для всех неубывающих функций v , для которых данные ожидаемые значения существуют.

Тогда из утверждения 3 вытекает справедливость следующего утверждения:

Утверждение 9

Для любых случайных величин X и Y сравнение $X \leq_{ST^{(t)}} Y$ справедливо тогда и только тогда, если выполняется неравенство $E[v(X)] \leq E[v(Y)]$ для всех неубывающих функций v , для которых данные ожидаемые значения существуют.

ПРЕМИИ ПО СТОП-ЛОСС КОНТРАКТАМ ПО РАЗНЫМ РИСКАМ И СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК МЕЖДУ НИМИ

В финансовой и страховой отраслях часто используются так называемые стоп-лосс контракты, которые позволяют получать возмещение, когда некоторая рискованная величина X превышает определенное пороговое значение t . Величина $(X - t)_+$ (где $Y_+ = \max\{Y, 0\}$) представляет размер самого превышения над порогом t .

Определение 4. Функция $p_X(t) = E[(X - t)_+]$ называется преобразованием стоп-лосс X .

Премии по стоп-лосс контрактам рассчитывают на основании величины преобразования стоп-лосс. Подробную информацию об использовании и расчете премий стоп-лосс см. в Kaas [16].

Полезно привести некоторые свойства преобразования «стоп-лосс» p_X (см. [14] свойство 1.7.2).

Свойство

Предположим, что $E[|X|] < +\infty$. Стоп-лосс преобразование X имеет следующие свойства:

- (i) оно убывает и выпукло;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} p_X(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} \{p_X(t) + t\} = E[X]$.

Следующий результат по поводу отношения порядка $\leq_{ST}$ связан с преобразованием стоп-лосс.

Утверждение 10 (см. [14])

При данных двух случайных величинах X и Y $X \leq_{ST} Y$ тогда и только тогда, если $p_Y - p_X$ не возрастает в области $(-\infty, +\infty)$.

Из утверждения 2 следует справедливость следующего утверждения:

Утверждение 11

При данных двух случайных величинах X и Y $X \leq_{ST^{(t)}} Y$ при некотором t тогда и только тогда, если $p_Y - p_X$ не возрастает в области $(-\infty, +\infty)$.

Интересно дать интерпретацию с позиции риск-менеджмента последних утверждений.

Они указывают на то, что когда справедливо $X \leq_{ST^{(t)}} Y$, разница между их соответствующими премиями за стоп-лосс уменьшается с ростом порогового уровня t . Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} (E[(Y - t)_+] - E[(X - t)_+]) = 0$, наибольшая разница между премиями возникает при $t = 0$ (и равная $E[Y] - E[X]$). И эта разница уменьшается с ростом порогового уровня. Таким образом, оценка стоп-лосс контрактов по рискам, сравнимым в соответствии с порядком $\leq_{ST^{(t)}}$, приводит к очень разным премиям при небольших пороговых уровнях, но эта разница будет уменьшаться по мере увеличения этого уровня.

Сравнение дефицитов со стохастическим доминированием: дисперсионный порядок

Мы теперь пойдем по другому пути и будем сравнивать дефициты вместо рисков X и Y . Это приводит к следующему определению.

Определение 5. Для данных двух рисков X и Y говорят, что X меньше, чем Y в дисперсионном порядке, и обозначают как $X \leq_{DISP} Y$, если $(X - VaR[X, p])_+ \leq_{ST} (Y - VaR[Y, p])_+$ для всех $0 < p < 1$. Ранние ссылки на отношение порядка $\leq_{DISP}$ связаны с работами Doksum [17], Deshpande, Kochar [18]. См. также Bartoszewicz [19, 20], Munoz-Perez [21] и Landsberger, Meilijson [22, 23].

Замечание. Отношение $\leq_{DISP}$ является рефлексивным и транзитивным, но не антисимметричным на множестве функций распределения. Действительно, если $X \leq_{DISP} Y$ и $Y \leq_{DISP} X$ одновременно справедливы, это означает, что $Y =_d X + c$ для некоторой константы c . Это легко видно из того факта, что $(X' - VaR[X', p]) =_d (X - VaR[X, p])$ если $X' =_d X + c$.

Воспользовавшись понятием « VaR в степени t », введем более общее понятие дисперсионного порядка степени t для любого $t \geq 1$.

Определение 6. Для данных двух рисков X и Y будем говорить, что X меньше, чем Y в дисперсионном порядке степени t , $t \geq 1$, и обозначать как $X \leq_{DISP^{(t)}} Y$, тогда и только тогда, если

$(X - VaR^{(t)}[X, p])_+ \leq_{ST} (Y - VaR^{(t)}[Y, p])_+$ для всех $0 < p < 1$.

Интересно, как отношение дисперсного порядка можно выразить в терминах отношения дисперсного порядка степени t при любом действительном значении $t \geq 1$.

Утверждение 12

Если $X \prec_{DISP} Y$, то соотношение $X \leq_{DISP^{(t)}} Y$ справедливо при всех $t \geq 1$.

Если соотношение $X \leq_{DISP^{(t)}} Y$ справедливо хотя бы для одного значения $t = t_0 \geq 1$, то $X \leq_{DISP} Y$.

Доказательство приведено в Приложении 4.

Из утверждения 1 следует, что меры риска $VaR^{(t)}$ применимы для определения стохастического доминирования рисков. И риск X меньше риска Y в смысле стохастического доминирования, если неравенство $VaR^{(t)}[X, p] \leq VaR^{(t)}[Y, p]$ справедливо хотя бы для одного значения $t = t_0 \geq 1$ для всех $p \in [0, 1]$.

ДИСПЕРСИОННЫЙ ПОРЯДОК И СПРЕДЫ VaR

Некоторые стохастические порядки основаны на расстояниях между соответствующими VaR основных случайных величин. Дисперсионный порядок обладает таким свойством, связанным с разницей между VaR (см. [14], свойство 3.3.60).

Свойство

Для данных двух случайных величин X и Y $X \leq_{DISP} Y$ справедливо, тогда и только тогда, если $VaR[X, p_2] - VaR[X, p_1] \leq VaR[Y, p_2] - VaR[Y, p_1]$ каждый раз, когда $0 < p_1 \leq p_2 < 1$, или эквивалентно, если $VaR[Y, p] - VaR[X, p]$ возрастает по $p \in (0, 1)$.

Из данного свойства видно, что $\leq_{DISP}$ действительно является порядком дисперсии. Аналогичным свойством обладают и меры риска $VaR^{(t)}$.

Утверждение 13

Для данных двух случайных величин X и Y , $X \leq_{DISP} Y$ справедливо, тогда и только тогда, если

$$VaR^{(t)}[X, p_2] - VaR^{(t)}[X, p_1] \leq VaR^{(t)}[Y, p_2] - VaR^{(t)}[Y, p_1]$$

при любом $t \geq 1$ каждый раз, когда $0 < p_1 \leq p_2 < 1$ или, что эквивалентно, тогда и только тогда, если $VaR^{(t)}[Y, p] - VaR^{(t)}[X, p]$ возрастает по $p \in (0, 1)$.

Доказательство приведено в Приложении 5.

Из предыдущего свойства следует следующее полезное утверждение:

Утверждение 14

Для данных двух случайных величин X и Y , которые удовлетворяют соотношению $X \leq_{DISP^{(t)}} Y$

справедливо при некотором $t \geq 1$, справедливо и соотношение $X \leq_{ST} Y$, если значение левой граничной точки носителя величины Y больше или равно значению левой граничной точки носителя величины X .

Доказательство

Если $X \leq_{DISP^{(t)}} Y$, то из предыдущего утверждения следует, что

$$\begin{aligned} VaR^{(t)}[Y, p] - VaR^{(t)}[X, p] &\geq \\ &\geq VaR^{(t)}[Y, 0] - VaR^{(t)}[X, 0] \geq 0. \end{aligned}$$

Причем последнее неравенство, очевидно, следует из того, что значение левой граничной точки носителя величины Y больше или равно значению левой граничной точки носителя величины X и смыслу меры риска $VaR^{(t)}$.

Примеры дисперсионного доминирования для рисков с различными функциями распределения

Пример 5. Риски с равномерным распределением потерь.

Рассмотрим два риска X и Y , причем

$$X \in Uni[a, b], \text{ а } Y \in Uni[c, d].$$

Но для рисков с распределениями из $Uni[a, b]$ справедлива формула $VaR[X, p] = a + (b - a)p$.

Поэтому

$$\begin{aligned} VaR[Y, p] - VaR[X, p] &= c + (d - c)p - a - (b - a)p = \\ &= c - a + (a + d - (b + c))p. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что эта функция от переменной p является неубывающей тогда и только тогда, если $a + d \geq b + c$ т.е. $d - c \geq b - a$.

Таким образом, справедливо следующее предложение:

Предложение 5

Пусть имеем два риска X и Y , причем $X \in Uni[a, b]$, а $Y \in Uni[c, d]$.

При этом соотношение $X \leq_{DISP} Y$ выполняется тогда и только тогда, если $d - c \geq b - a$, т.е. длина отрезка $[c, d]$ не меньше длины отрезка $[a, b]$.

Пример 6. Риски со сдвинутым экспоненциальным распределением потерь.

Рассмотрим два риска X и Y , причем $X \in Exp(k_1, a_1)$, а $Y \in Exp(k_2, a_2)$.

Как мы знаем, для

$$X \in Exp(k, a) \quad VaR[X, p] = a - \frac{\ln(1-p)}{k}.$$

Поэтому

$$VaR[Y, p] - VaR[X, p] = a_2 - a_1 + \ln(1-p) \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right).$$

Отсюда видно, что эта функция от переменной p является неубывающей тогда и только тогда, если $k_2 \leq k_1$.

Таким образом, справедливо следующее предложение:

Предложение 6

Пусть имеем два риска X и Y , причем

$$X \in Exp(k_1, a_1), \text{ а } Y \in Exp(k_2, a_2).$$

Тогда соотношение $X \leq_{DISP} Y$ выполняется тогда и только тогда, если $k_2 \leq k_1$.

Пример 3. Риски с нормальным распределением потерь.

Рассмотрим два риска X и Y , причем

$$X \in Nor(m_1, s_1), \text{ а } Y \in Nor(m_2, s_2).$$

Как известно, (см. например [14]) если $X \in Nor(m, s)$, то $VaR[X, p] = m + k_p s$.

Поэтому

$$VaR[Y, p] - VaR[X, p] = m_2 - m_1 + k_p (s_2 - s_1).$$

Отсюда видно, что так как квантиль k_p является возрастающей функцией p , то эта функция от переменной p является неубывающей тогда и только тогда, если $s_2 \geq s_1$.

Таким образом, справедливо следующее предложение:

Предложение 7

Пусть имеем два риска X и Y , причем

$$X \in Nor(m_1, s_1), \text{ а } Y \in Nor(m_2, s_2).$$

Тогда соотношение $X \leq_{DISP} Y$ выполняется тогда и только тогда, если $s_2 \geq s_1$.

Пример 4. Риски с треугольным распределением потерь.

Рассмотрим два риска X и Y , причем

$$X \in Tr[a, b, m_1] \text{ а } Y \in Tr[a, b, m_2].$$

Можно доказать (см. Приложение 6), что справедливо следующее предложение:

Предложение 8

Пусть имеем два риска X и Y , причем

$$X \in Tr[a, b, m_1] \text{ а } Y \in Tr[a, b, m_2].$$

Тогда соотношение $X \leq_{DISP} Y$ выполняется только в том случае, если $m_1 < m_2$.

СТАВКА ОПАСНОСТИ И ДИСПЕРСИОННЫЙ ПОРЯДОК

Когда оценивается возможность большой потери, очевидна значимость величины дуальной функции распределения (функции выживания) $\bar{F}_X(x)$, которая оценивает вероятность убытка X , превышающего значение x . Во многих исследованиях отмечалась важность величины, которая называется ставкой опасности (см., например, [24]), которая может помочь при оценке веса правого хвоста распределения потерь.

Определение 7. При неотрицательной величине случайных потерь X , с плотностью распределения $f_X(x)$, величина ставки опасности определяется как функция

$$r_X(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}, \quad x \geq 0.$$

В теории надежности ставка опасности называется коэффициентом отказа, а в страховании жизни — силой смертности.

Из определения легко получить такое представление для ставки опасности:

$$r_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Pr[x < X \leq x + \Delta x | X > x] / \Delta x,$$

где через $\Pr[A|B]$ обозначается условная вероятность события A при условии исполнения события B .

Из последнего соотношения следует такая интерпретация ставки опасности: она определяет вероятность проявления опасности в x («неудачи») при условии благоприятного стечения обстоятельств («выживания») до x . Интуитивно говоря, если r_X оказывается небольшим, то распределение становится с толстым хвостом, если же r_X оказывается большим, то распределение потерь становится распределением с тонким хвостом.

Из последнего соотношения получаются следующие два соотношения, связывающие между собой величины

$$r_X(x) = -\frac{1}{\bar{F}_X(x)} \frac{d}{dx} \bar{F}_X(x),$$

$$\bar{F}_X(x) = \exp\left(-\int_0^x r_X(t) dt\right), \quad x \geq 0, \quad (4)$$

из которых следует, что ставка опасности однозначно характеризует распределение опасности. И наоборот: зная закон распределения потерь, можно рассчитать ставку опасности, например, если величина опасности X подчиняется распределению Парето с параметрами $a > 0, t > 0, X \in \text{Par}(a, t)$, то оказывается, что ставка опасности равна (см., например, [14])

$$r_X(x) = \frac{a}{t+x}. \quad (5)$$

Мы видим, что r_X строго убывает от $r_X(0) = \frac{a}{t}$ до $r_X(+\infty) = 0$.

Если $r_X(x) = k = \text{const}$, то из формул (1) получается, что

$$F_X(x) = e^{-kx}, \text{ если } x \geq 0, \\ F_X(x) = 0, \text{ если } x < 0,$$

т.е. случайная величина подчиняется показательному распределению с параметром k , который называется интенсивностью, $X \in \text{Exp}(k)$. То есть частный случай постоянства ставки опасности реализуется в случае показательного-распределенных случайных величин потерь и совпадает с показателем интенсивности таких величин.

Дисперсионный порядок обладает таким свойством, связанным с разницей между VaR (см. [14], свойство 3.3.62).

Свойство

Для данных двух случайных величин X и Y , $X \leq_{\text{DISP}} Y$ справедливо тогда и только тогда, если $r_Y(VaR[Y, p]) \leq r_X(VaR[X, p])$ для всех $0 < p < 1$.

Пример 7. Риски с показательным распределением.

Рассмотрим два риска X и Y , причем $X \in \text{Exp}(k_1)$, а $Y \in \text{Exp}(k_2)$.

Тогда из предыдущего свойства следует, что $X \leq_{\text{DISP}} Y$ справедливо тогда и только тогда, если $k_2 \leq k_1$.

Пример 8. Риски с распределением потерь Парето.

Рассмотрим два риска X и Y , причем $X \in \text{Par}(a_1, t_1)$, а $Y \in \text{Par}(a_2, t_2)$.

Тогда из формулы (5) и предыдущего свойства следует, что $X \leq_{\text{DISP}} Y$ справедливо тогда и только тогда, если неравенство

$$\frac{a_2}{t_2 + VaR[Y, p]} \leq \frac{a_1}{t_1 + VaR[X, p]} \quad (6)$$

выполняется при всех $0 < p < 1$.

Получим выражение для меры риска VaR для любой случайной величины $X \in \text{Par}(a, t)$.

Согласно определению $VaR[X, p]$ имеем $\bar{F}_X(VaR[X, p]) = 1 - p$, т.е.

$$\left(1 + \frac{VaR[X, p]}{t}\right)^{-a} = 1 - p, \text{ откуда следует, что}$$

$$VaR[X, p] = t((1 - p)^{1/a} - 1).$$

Используя данный результат, мы можем неравенство (6) переписать в виде

$$\frac{a_2}{t_2(1-p)^{-1/a_2}} \leq \frac{a_1}{t_1(1-p)^{-1/a_1}}. \quad (7)$$

Рассмотрим функцию

$$g(a, t) = \frac{a}{t(1-p)^{-1/a}} = \frac{a}{t}(1-p)^{1/a}.$$

Очевидно, что по переменной t она является невозрастающей, а по переменной a неубывающей функцией, откуда следует очередное предложение.

Предложение 9

Пусть имеем два риска X и Y , причем $X \in \text{Par}(a_1, t_1)$, а $Y \in \text{Par}(a_2, t_2)$.

Тогда соотношение $X \leq_{\text{DISP}} Y$ выполняется тогда и только тогда, если $a_1 \geq a_2$ и $t_1 \leq t_2$.

Оказывается, что справедливо и обобщение последнего свойства на общие соотношения $\leq_{\text{DISP}^{(t)}}$ при любом $t \geq 1$.

Утверждение 15

Для данных двух случайных величин X и Y справедливо $X \leq_{\text{DISP}^{(t)}} Y$ тогда и только тогда, если

$$r_Y(\text{VaR}^{(t)}[Y, p]) \leq r_X(\text{VaR}^{(t)}[X, p]).$$

Для всех $0 < p < 1$.

(Доказательство приведено в Приложении 7).

ВЫВОДЫ

Интуитивное понятие о стохастическом порядке между случайными величинами сформировалось и развивалось в теории вероятностей с середины

XX в. Это привело к введению в научный оборот нескольких связанных, но различных понятий стохастического порядка и их исследованию. Но лишь в 90-е гг. эти понятия проникли в приложения по риск-менеджменту и в актуарную область, превратившись в активно развивающуюся область, позволяющую сравнивать сами факторы риска как случайные величины и уровень связанных с ними опасностями (рисками), а не только получать определенные оценки возможных потерь, связанных с ними (ожидаемых или максимальных с определенной доверительной вероятностью или других), которые чаще всего применяли и применяют последние десятилетия и практики, и ученые в риск-менеджменте и в актуарной области. При этом выяснилось, что многие типы стохастического порядка, которые можно исследовать на множестве рисков, которыми мы интересуемся, могут быть выражены с помощью таких мер риска, как VaR . Описанию некоторых типов стохастического порядка между рисками и исследованию их связей с мерами риска VaR и мерами катастрофических рисков VaR в степени t , $\text{VaR}^{(t)}$ посвящена данная работа. В работе, кроме того, для известных примеров распределений потерь, которые находят широкие приложения в риск-менеджменте и актуарной науке, получены необходимые и достаточные условия, позволяющие сравнивать риски, подчиняющиеся этим распределениям.

Результаты и методы данной работы могут представлять интерес как для практиков, так и для ученых, занимающихся проблемами риск-менеджмента и актуарной областью.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Lehmann E.L. Ordered families of distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1955;26(3):399-419. DOI: 10.1214/aoms/1177728487
2. Kamae T., Krengel U., O'Brien G.L. Stochastic inequalities on partially ordered spaces. *The Annals of Probability*. 1977;5(6):899-912. DOI: 10.1214/aop/1176995659
3. Mosler K.C., Scarsini M. Stochastic orders and applications: A classified bibliography. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1993. 379 p.
4. Shaked M., Shantikumar J.G. Stochastic orders and their applications. New York, NY: Academic Press; 1994. 545 p.
5. Müller A., Stoyan D. Comparison methods for stochastic models and risks. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd; 2002. 330 p.
6. Goovaerts M.J., Kaas R., Van Heerwaarden A.E., Bauwelinckx T. Effective actuarial methods. Amsterdam: Elsevier Science Publishers BV; 1990. 316 p.
7. Kaas R., Van Heerwaarden A.E., Goovaerts M.J. Ordering of actuarial risks. Brussels: Caire; 1994. 144 p.
8. Минасян В.Б. Новые способы измерения катастрофических финансовых рисков: меры " VaR в степени t " и их вычисление. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(3):92-109. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-3-92-109
9. Минасян В.Б. Новые меры рисков " VaR в степени t " и " ES в степени t " и меры риска искажения. *Финансы: теория и практика*. 2020;24(6):92-107. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-6-92-107

- Minasyan V.B. New risk measures “VaR to the power of t ” and “ES to the power of t ” and distortion risk measures. *Finance: Theory and Practice*. 2020;24(6):92-107. DOI: 10.26794/2587-5671-2020-24-6-92-107
10. Kaas R., Goovaerts M. J., Dhaene J., Denuit M. Modern actuarial risk theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 2001. 381 p.
 11. Lehmann E.L. Testing statistical hypotheses. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.; 1959. 369 p.
 12. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. C. Inequalities: Theory of majorization and its applications. New York, NY: Springer; 2011. 909 p. DOI: 10.1007/978-0-387-68276-1
 13. Ross S.M. Stochastic processes. New York, NY: John Wiley & Sons Inc.; 1983. 307 p.
 14. Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Ltd; 2005. 464 p. DOI: 10.1002/0470016450
 15. Минасян В.Б. Модели оценки рисков деятельности компаний, реализующих проекты с НИОКР. *Финансы: теория и практика*. 2019;23(1):133-146. DOI: 10.26794/2587-5671-2019-23-1-133-146
Minasyan V.B. Risk assessment models of the companies implementing R&D projects. *Finance: Theory and Practice*. 2019;23(1):133-146. DOI: 10.26794/2587-5671-2019-23-1-133-146
 16. Kaas R. How to (and how not to) compute stop-loss premiums in practice. *Insurance: Mathematics and Economics*. 1993;13(3):241-254. DOI: 10.1016/0167-6687(93)90405-E
 17. Doksum K. Starshaped transformations and the power of rank tests. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1969;40(4):1167-1176. DOI: 10.1214/aoms/1177697493
 18. Deshpande J.V., Kochar S.C. Dispersive ordering is the same as tail-ordering. *Advances in Applied Probability*. 1983;15(3):686-687. DOI: 10.2307/1426626
 19. Bartoszewicz J. Dispersive ordering and the total time on test transformation. *Statistics & Probability Letters*. 1986;4(6):285-288. DOI: 10.1016/0167-7152(86)90045-3
 20. Bartoszewicz J. Stochastic order relations and the total time on test transform. *Statistics & Probability Letters*. 1995;22(2):103-110. DOI: 10.1016/0167-7152(94)00055-d
 21. Muñoz-Pérez J. Dispersive ordering by the spread function. *Statistics & Probability Letters*. 1990;10(5):407-410. DOI: 10.1016/0167-7152(90)90021-X
 22. Landsberger M., Meilijson I. The generating process and an extension of Jewitt’s location independent risk concept. *Management Science*. 1994;40(5):662-669. DOI: 10.1287/mnsc.40.5.662
 23. Landsberger M., Meilijson I. Co-monotone allocations, Bickel-Lehmann dispersion and the Arrow-Pratt measure of risk aversion. *Annals of Operations Research*. 1994;52(2):97-106. DOI: 10.1007/BF02033185
 24. Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E. Loss models: From data to decisions. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.; 1998. 553 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / ABOUT THE AUTHOR



Виген Бабкенович Минасян — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой корпоративных финансов, инвестиционного проектирования и оценки им. М.А. Лимитовского факультета финансов Института управления, РАНХ и ГС при Президенте РФ, Москва, Российская Федерация

Vigen B. Minasyan — Cand. Sci. (Phis.-Math.), Assoc. Prof., Head of Limitivsky corporate finance, investment design and evaluation department, Faculty of Finance, Institute of Management, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russian Federation

<https://orcid.org/0000-0001-6393-145X>

minasyanvb@ranepa.ru; minasyanvb@yandex.ru

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of interest statement: the author has no conflicts of interest to declare.

Статья поступила в редакцию 10.04.2025; после рецензирования 13.05.2025; принята к публикации 27.05.2025.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

The article was submitted on 10.04.2025; revised on 13.05.2025 and accepted for publication on 27.05.2025.

The author read and approved the final version of the manuscript.

Переводчик Н.И. Соколова

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Очевидно, что если выполнено неравенство $b \leq c$, т.е. носитель распределения $Uni[a, b]$ целиком располагается ниже носителя распределения $Uni[c, d]$, то неравенство $Var[X, p] \leq Var[Y, p]$ будет удовлетворено для всех $p \in [0, 1]$, а значит, $X \leq_{ST} Y$.

Теперь предположим, что $b > c$.

Однако соотношение $X \leq_{ST} Y$ эквивалентно неравенству $Var[X, p] \leq Var[Y, p]$ для всех p из интервала $[0, 1]$.

Но, как известно, (например, [15] Приложение 2), в случае рисков с распределениями из $Uni[a, b]$ справедлива формула

$$Var[X, p] = a + (b - a)p.$$

Значит, имеем $a + (b - a)p \leq c + (d - c)p$, т.е. $p[b - a - (d - c)] \leq c - a$.

Рассмотрим два возможных случая:

1) предположим, что $b - a \geq d - c$, т.е. длина отрезка $[a, b]$ больше длины отрезка $[c, d]$.

Тогда получаем, что неравенство $p \leq \frac{c - a}{(b - a) - (d - c)}$ должно выполняться при любом $p \in [0, 1]$, а это может быть справедливо лишь при выполнении неравенства $\frac{c - a}{(b - a) - (d - c)} \geq 1$, что эквивалентно $d \geq b$;

2) предположим, что $b - a < d - c$, т.е. длина отрезка $[a, b]$ меньше длины отрезка $[c, d]$.

Тогда получаем, что неравенство $p \geq \frac{c - a}{(b - a) - (d - c)}$ должно выполняться при любом $p \in [0, 1]$, а это может быть справедливо лишь при выполнении неравенства $\frac{c - a}{(b - a) - (d - c)} \leq 0$, что эквивалентно $c \geq a$.

Таким образом, справедливо предложение 1.

Приложение 2

Соотношение $X \leq_{ST} Y$ эквивалентно неравенству $Var[X, p] \leq Var[Y, p]$ для всех p из интервала $[0, 1]$. Но, как известно, (например, [15] Приложение 3), в случае рисков с распределениями из $Tr[a, b, m]$ справедлива формула $Var[X, p] = b - sqr[(1 - p)(b - a)(b - m)]$, если $m \leq a(1 - p) + pb$ и $Var[X, p] = a + sqr[p(b - a)(b - a)]$, если $m > a(1 - p) + pb$.

(Здесь и далее $sqr[X]$ обозначение для корня квадратного из X).

Рассмотрим три случая:

1) $m_1 < m_2 \leq a(1 - p) + pb$.

В этом случае неравенство $Var[X, p] \leq Var[Y, p]$ эквивалентно неравенству

$$b - \sqrt{(1 - p)(b - a)(b - m_1)} \leq b - \sqrt{(1 - p)(b - a)(b - m_2)},$$

которое, в свою очередь, эквивалентно справедливому неравенству $m_1 \leq m_2$;

2) $a(1 - p) + pb \leq m_1 < m_2$.

В этом случае неравенство $Var[X, p] \leq Var[Y, p]$ эквивалентно неравенству

$$a + \sqrt{p(b - a)(m_1 - a)} \leq a + \sqrt{p(b - a)(m_2 - a)},$$

которое, в свою очередь, эквивалентно справедливому неравенству $m_1 \leq m_2$;

3) $m_1 \leq a(1 - p) + pb \leq m_2$.

В этом случае неравенство $Var[X, p] \leq Var[Y, p]$ эквивалентно неравенству

$$b - \sqrt{(1 - p)(b - a)(b - m_1)} \leq a + \sqrt{p(b - a)(m_2 - a)} \text{ или } \sqrt{p(b - a)(m_2 - a)} + \sqrt{(1 - p)(b - a)(b - m_1)} \geq b - a,$$

однако при $p = 0$ получаем неравенство $\sqrt{(b - a)(b - m_1)} \geq b - a$, которое эквивалентно, очевидно, неверному неравенству $m_1 \leq a$, поэтому соотношение

$X \leq_{ST} Y$ не выполняется. Но может тогда выполняется соотношение $Y \leq_{ST} X$?
Однако данное соотношение эквивалентно выполнению неравенства

$$b - \sqrt{(1-p)(b-a)(b-m_1)} \leq a + \sqrt{p(b-a)(m_2-a)}$$

при всех p из интервала $[0, 1]$. Или неравенства

$$\sqrt{p(b-a)(m_2-a)} + \sqrt{(1-p)(b-a)(b-m_1)} \leq b-a,$$

которое с помощью элементарных преобразований возведения обеих частей в квадрат и приведения подобных слагаемых сводится к неравенству

$$2\sqrt{(m_2-a)(b-m_1)}\sqrt{p(1-p)} \leq p(b+a-m_1-m_2) + m_1-a.$$

Однако численное исследование показывает, что в зависимости от соотношения значений параметров a, b, m_1, m_2 оно может как выполняться при всех p из интервала $[0, 1]$, так и не выполняться при определенных значениях p из данного интервала.

Например, при $a=0, b=100, m_1=m_2=50$ данное неравенство сводится к неравенству

$2\sqrt{50 \cdot 50} \sqrt{p(1-p)} \leq 50$, которое эквивалентно неравенству $(p - \frac{1}{2})^2 \geq 0$, которое очевидно выполняется при всех значениях p .

Однако при $a=0, b=100, m_1=1, m_2=99$ данное неравенство сводится к неравенству

$2\sqrt{99 \cdot 99} \sqrt{p(1-p)} \leq 1$, которое эквивалентно неравенству $2\sqrt{50 \cdot 50} \sqrt{p(1-p)} \leq 50$, которое эквивалентно неравенству $p^2 - p + \frac{1}{4 \cdot 99^2} \geq 0$, которое, очевидно, не выполняется на множестве значений p из

интервала $(p_1, p_2) \subset [0, 1], p_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{99^2}}), p_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{99^2}})$.

Таким образом, доказана справедливость предложения 4.

Приложение 3

Произвольное вещественное $t \geq 1$ можно представить в виде $t = k + e$, где k — натуральное число, а e — действительное число, причем $0 \leq e < 1$. Очевидно, что k является целой частью числа t , а e является его дробной частью.

Тогда, согласно [8], справедливо представление: $VaR^{(t)}[X, p] = VaR[X, 1 - (1-p)^k(1-ep)]$.

Однако, так как согласно определению 1 неравенство $VaR[X, q] \leq VaR[Y, q]$ удовлетворено для всех $q \in [0, 1]$, то оно должно быть удовлетворено и при $q = 1 - (1-p)^k(1-ep)$, т.е.

$$VaR[X, 1 - (1-p)^k(1-ep)] \leq VaR[Y, 1 - (1-p)^k(1-ep)] \text{ для всех } p \in [0, 1],$$

а значит, и $VaR^{(t)}[X, p] \leq VaR^{(t)}[Y, p]$.

Утверждение (i) доказано.

Теперь перейдем к доказательству утверждения (ii). Сначала рассмотрим случай натуральной степени. То есть предположим, что при некотором натуральном n_0 при всех $p \in [0, 1]$ справедливо неравенство $VaR^{(n_0)}[X, p] \leq VaR^{(n_0)}[Y, p]$.

Однако, используя формулу для VaR в степени t , мы имеем:

$$VaR[X, 1 - (1-p)^{n_0}] \leq VaR[Y, 1 - (1-p)^{n_0}] \text{ для всех } p \in [0, 1].$$

Но для любого $q \in [0,1]$ найдется такое $p \in [0,1]$, что $q = 1 - (1-p)^{n_0}$.

А именно, это $p = 1 - (1-q)^{1/n_0}$. Таким образом, тогда неравенство $Var[X, q] \leq Var[Y, q]$ выполняется при любом $q \in [0,1]$. А значит, $X \leq_{ST} Y$.

При произвольном вещественном $t_0 \geq 1$ его можно представить в виде $t_0 = k + e$, где k является целой частью числа t_0 , а e является его дробной частью.

Если при некотором t_0 при всех $p \in [0,1]$ справедливо неравенство $Var^{(t_0)}[X, p] \leq Var^{(t_0)}[Y, p]$, то, используя доказанное в [8] представление (2), получаем, что

$$Var[X, 1 - (1-p)^k(1-ep)] \leq Var[Y, 1 - (1-p)^k(1-ep)] \text{ для всех } p \in [0,1].$$

Но для любого $q \in [0,1]$ найдется единственное число $p \in [0,1]$, что $q = 1 - (1-p)^k(1-ep)$, т.е. $(1-p)^k(1-ep) = 1-q$.

Это следует из того, что функция $f(p) = (1-p)^k(1-ep)$ при любых $k \geq 1$ и $e \in [0,1]$ является непрерывной невозрастающей функцией, причем $f(0) = 1$ и $f(1) = 0$. То есть эта функция осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на себя. Что, в свою очередь, следует из того, что

$$f'(p) = -k(1-p)^{k-1}(1-ep) - e(1-p)^k = -(1-p)^{k-1}[k(1-ep) + e(1-p)] \leq 0.$$

Таким образом, тогда неравенство $Var[X, q] \leq Var[Y, q]$ выполняется при любом $q \in [0,1]$. А значит, $X \leq_{ST} Y$.

Приложение 4

При произвольном вещественном $t \geq 1$ его можно представить в виде $t = k + e$, где k — натуральное число, а e — действительное число, причем $0 \leq e < 1$. Очевидно, что k является целой частью числа t , а e является его дробной частью.

Тогда, согласно [8], справедливо представление: $Var^{(t)}[X, p] = Var[X, 1 - (1-p)^k(1-ep)]$.

Однако, так как согласно определению 2, если $X \leq_{DISP} Y$, то соотношение

$$(X - Var[X, q])_+ \leq_{ST} (Y - Var[Y, q])_+ \text{ для всех } 0 < q < 1.$$

Но тогда оно должно быть удовлетворено и при частном значении $q = 1 - (1-p)^k(1-ep)$, т.е.

$$(X - Var[X, 1 - (1-p)^k(1-ep)])_+ \leq_{ST} (X - Var[Y, 1 - (1-p)^k(1-ep)])_+$$

для всех $p \in [0,1]$, а значит, и $X \leq_{DISP^{(t)}} Y$.

Утверждение (i) доказано.

Теперь перейдем к доказательству утверждения (ii). Сначала рассмотрим случай натуральной степени. То есть предположим, что при некотором натуральном n_0 справедливо соотношение $X \leq_{DISP^{(n_0)}} Y$. Значит, $(X - Var^{(n_0)}[X, q])_+ \leq_{ST} (Y - Var^{(n_0)}[Y, q])_+$.

Тогда получаем:

$$(X - Var[X, 1 - (1-q)^{n_0}])_+ \leq_{ST} (Y - Var[Y, 1 - (1-q)^{n_0}])_+ \text{ для всех } q \in [0,1].$$

Но для любого $p \in [0,1]$ найдется такое $q \in [0,1]$, что $p = 1 - (1-q)^{n_0}$.

А именно, это $q = 1 - (1-p)^{1/n_0}$. Таким образом, тогда соотношение

$$(X - Var[X, p])_+ \leq_{ST} (Y - Var[Y, p])_+ \text{ выполняется при любом } p \in [0,1]. \text{ А значит, } X \leq_{DISP} Y.$$

При произвольном вещественном $t_0 \geq 1$ его можно представить в виде $t_0 = k + e$, где k является целой частью числа t_0 , а e является его дробной частью.

Если при некотором t_0 при всех $p \in [0,1]$ справедливо соотношение $X \leq_{DISP^{(t_0)}} Y$. Значит,

$$(X - Var^{(t_0)}[X, q])_+ \leq_{ST} (Y - Var^{(t_0)}[Y, q])_+.$$

Тогда получаем:

$$(X - VaR[X, 1 - (1 - q)^k(1 - eq)])_+ \leq_{ST} (Y, 1 - (1 - q)^k(1 - eq))_+ \text{ для всех } q \in [0, 1].$$

Но для любого $p \in [0, 1]$ найдется единственное число $q \in [0, 1]$, что $p = 1 - (1 - q)^k(1 - eq)$, т.е. $(1 - q)^k(1 - eq) = 1 - p$.

Это следует из того, что функция $f(q) = (1 - q)^k(1 - eq)$ при любых $k \geq 1$ и $e \in [0, 1]$ является непрерывной невозрастающей функцией, причем $f(0) = 1$ и $f(1) = 0$. То есть эта функция осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на себя. Что, в свою очередь, следует из того, что

$$f'(q) = -k(1 - q)^{k-1}(1 - eq) - e(1 - q)^k = -(1 - q)^{k-1}[k(1 - eq) + e(1 - q)] \leq 0.$$

Таким образом, тогда соотношение $(X - VaR[X, p])_+ \leq_{ST} (Y - VaR[Y, p])_+ \leq_{ST}$ выполняется при любом $p \in [0, 1]$. А значит, $X \leq_{DISP} Y$.

Приложение 5

При произвольном вещественном $t \geq 1$ его можно представить в виде $t = k + e$, где k является целой частью числа t , а e является его дробной частью.

Рассмотрим случайную величину $X_p^{(t)} = (X - VaR^{(t)}[X, p])_+$. Тогда

$$VaR^{(t)}[X_p^{(t)}, q] = VaR[X_p^{(t)}, 1 - (1 - q)^k(1 - eq)] = 0, \text{ если } q \leq p \text{ и } VaR^{(t)}[X_p^{(t)}, q] = VaR^{(t)}[X, q] - VaR^{(t)}[X, p], \text{ если } q > p.$$

Однако $X \leq_{DISP} Y$ тогда и только тогда, если $X_p^{(1)} \leq_{ST} Y_p^{(1)}$, что согласно утверждению 2 эквивалентно соотношению $X_p^{(t)} \leq_{ST} Y_p^{(t)}$, т.е. $VaR^{(t)}[X_p, q] \leq VaR^{(t)}[Y_p, q]$ при произвольных $t \geq 1$ и $0 < q < 1$. А это, в свою очередь, эквивалентно $VaR^{(t)}[X, q] - VaR^{(t)}[X, p] \leq VaR^{(t)}[Y, q] - VaR^{(t)}[Y, p]$ при любых $0 < p < q < 1$.

Приложение 6

Соотношение $X \leq_{ST} Y$ эквивалентно неравенству $VaR[X, p] \leq VaR[Y, p]$ для всех p из интервала $[0, 1]$. Но, как известно, (например, [15] Приложение 3), в случае рисков с распределениями из $Tr[a, b, m]$ справедлива формула $VaR[X, p] = b - \sqrt{p(b-a)(b-m)}$, если $m \leq a(1-p) + pb$ и $VaR[X, p] = a + \sqrt{p(b-a)(p(b-a) - (v-a))}$, если $m > a(1-p) + pb$.

Рассмотрим три случая:

1) $m_1 < m_2 \leq a(1-p) + pb$.

Тогда

$$\begin{aligned} VaR[Y, p] - VaR[X, p] &= \sqrt{(1-p)(b-a)(b-m_1)} - \sqrt{(1-p)(b-a)(b-m_2)} = \\ &= \sqrt{(1-p)(b-a)}(\sqrt{b-m_1} - \sqrt{b-m_2}) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что эта функция от переменной p является неубывающей и поэтому $X \leq_{DISP} Y$;

2) $a(1-p) + pb \leq m_1 < m_2$.

В этом случае

$$\begin{aligned} VaR[Y, p] - VaR[X, p] &= \sqrt{p(b-a)(m_2-a)} - \sqrt{p(b-a)(m_1-a)} = \\ &= \sqrt{p(b-a)}(\sqrt{m_2-a} - \sqrt{m_1-a}) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что эта функция от переменной p является неубывающей и поэтому $X \leq_{DISP} Y$;

3) $m_1 \leq a(1-p) + pb \leq m_2$.

В этом случае

$$\begin{aligned} VaR[Y, p] - VaR[X, p] &= a + \sqrt{p(b-a)(m_2-a)} - b + \sqrt{(1-p)(b-a)(b-m_1)} = \\ &= a - b + \sqrt{b-a}(\sqrt{p(m_2-a)} - \sqrt{(1-p)(b-m_1)}). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$f(p) = \sqrt{x_0 p} + \sqrt{(1-p)x_1}, x_0 = m_2 - a, x_1 = b - m_1.$$

Тогда

$$f'(p) = \frac{\sqrt{x_0}}{2\sqrt{p}} - \frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{1-p}} = \frac{\sqrt{x_0(1-p)} - \sqrt{x_1 p}}{2\sqrt{p(1-p)}},$$

поэтому неравенство $f'(p) \geq 0$ эквивалентно неравенству $\sqrt{x_0(1-p)} \geq \sqrt{x_1 p}$, откуда следует, что

$$p \leq \frac{x_0}{x_1 + x_0} = \frac{m_2 - a}{b - m_1 + m_2 - a}.$$

Однако в случае (3) выполняются неравенства $m_1 \leq a(1-p) + pb \leq m_2$, которые эквивалентны неравенствам $\frac{m_1 - a}{b - a} \leq p \leq \frac{m_2 - a}{b - a}$ и так как справедливость неравенства $\frac{m_2 - a}{b - m_1 + m_2 - a} \leq \frac{m_2 - a}{b - a}$ очевидна, то согласно свойству соотношения $X \leq_{DISP} Y$ выполняется.

Приложение 7

Из утверждения 13 и формулы $VaR^{(t)}[X, p] = VaR[X, 1 - (1-p)^m(1-ep)]$, где число t представлено в виде суммы его целой и дробных частей $t = m + e, 0 \leq e < 1$ (см.[8]), следует, что

$$0 \leq \frac{d}{dp}(VaR^{(t)}[Y, p] - VaR^{(t)}[X, p]) = \frac{m(1-p)^{m-1}(1-ep) + e(1-p)^m}{f_Y(VaR^{(t)}[Y, p])} - \frac{m(1-p)^{m-1}(1-ep) + e(1-p)^m}{f_X(VaR^{(t)}[X, p])} = (1-p)^{m-1}(m(1-ep) + e(1-p)) \left(\frac{1}{f_Y(VaR^{(t)}[Y, p])} - \frac{1}{f_X(VaR^{(t)}[X, p])} \right).$$

И так как $(1-p)^{m-1}(m(1-ep) + e(1-p)) \geq 0$ при $0 < p < 1$, то отсюда следует, что

$$f_Y(VaR^{(t)}[Y, p]) \leq f_X(VaR^{(t)}[X, p]), \text{ а значит, и } \frac{f_Y(VaR^{(t)}[Y, p])}{(1-p)^m(1-ep)} \leq \frac{f_X(VaR^{(t)}[X, p])}{(1-p)^m(1-ep)}.$$

Однако, так как по определению мер риска $VaR^{(t)}[X, p]$

$$\bar{F}_X(VaR^{(t)}[X, p]) = (1-p)^m(1-ep), \text{ то это означает, что } \frac{f_Y(VaR^{(t)}[Y, p])}{\bar{F}_Y(VaR^{(t)}[Y, p])} \leq \frac{f_X(VaR^{(t)}[X, p])}{\bar{F}_X(VaR^{(t)}[X, p])}.$$

И поэтому с использованием определения ставки опасности получаем:

$$r_Y(VaR^{(t)}[Y, p]) \leq r_X(VaR^{(t)}[X, p]).$$