



БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ, АНАЛИЗ И АУДИТ

УДК 519.816+519.863

МЕРЫ ВОЗМОЖНОСТИ И ВНУТРЕННЯЯ НОРМА ДОХОДНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ С НЕЧЕТКО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПЛАТЕЖАМИ

ВОЛКОВА ЕЛЕНА СЕРГЕЕВНА

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Математика-1», Финансовый университет, Москва, Россия

ГИСИН ВЛАДИМИР БОРИСОВИЧ

кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика-1», Финансовый университет, Москва, Россия

E-mail: vgisin@fa.ru

АННОТАЦИЯ

Внутренняя норма доходности (ВНД) является одной из важнейших характеристик инвестиционных проектов. В детерминированном случае ВНД инвестиционного проекта может быть определена как решение соответствующего алгебраического уравнения. Достаточно общие требования к потоку платежей (например, условия теоремы Норстрема) гарантируют существование ВНД и возможность ее применения в качестве одного из критериев эффективности проекта. С учетом фактора неопределенности ВНД перестает быть однозначно определенной даже для типичных проектов, в которых затраты предшествуют отдаче. Неопределенность значений параметров проекта приводит к тому, что появляется некоторое множество возможных значений ВНД. Если имеется информация о распределении значений параметров, она должна трансформироваться в распределение значений ВНД. Теория вероятностей предоставляет механизм подобной трансформации в случае, когда неопределенность удовлетворяет ряду довольно строгих требований. В ряде случаев, особенно когда речь идет об уникальных проектах, применение теоретико-вероятностных методов не выглядит достаточно обоснованным. В подобных ситуациях более адекватным представляется применение методов теории возможностей и теории нечетких множеств. В настоящей статье методы теории возможностей используются для вычисления ВНД инвестиционных проектов с нечетко определенными платежами. ВНД таких проектов представляет собой нечеткое множество, распределение возможностей в котором задается функцией принадлежности. В случае стандартного суммирования нечетких величин получены явные формулы для вычисления функции принадлежности. Наличие зависимости между платежами (например, малая вероятность одновременной реализации пессимистических сценариев по различным параметрам) позволяет учесть суммирование относительно т-норм. Расчет ВНД относительно нестандартных т-норм в общем случае сложен и ранее не применялся. В работе показано, как этот расчет может быть сведен к решению сравнительно несложной задачи выпуклого программирования в таком достаточно общем случае, когда т-норма порождается выпуклым аддитивным генератором, и приведен пример соответствующего расчета. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования критериев сравнения эффективности инвестиционных проектов с нечетко определенными платежами на основе теории возможностей.

Ключевые слова: инвестиционный проект с нечетко определенными платежами; нечеткая внутренняя норма доходности; распределение возможностей; нечеткая величина; треугольные нормы; суммирование нечетких величин относительно треугольных норм.

A POSSIBILISTIC APPROACH TO CALCULATING THE INTERNAL RATE OF RETURN FOR INVESTMENT PROJECTS WITH FUZZY CASH FLOWS

ELENA S. VOLKOVA

PhD, Associate Professor, the Mathematics-1 Chair, the Financial University, Moscow, Russia

VLADIMIR B. GISIN

PhD, Professor, Head of the Mathematics-1 Chair, the Financial University, Moscow, Russia

E-mail: vgisin@fa.ru

ABSTRACT

The internal rate of return (IRR) is among the most widely used characteristics of investment projects. In the deterministic case the IRR can be found as a solution to an algebraic equation. The existence and applicability of the IRR may be guaranteed by rather general conditions, e.g. those of Norstrom theorem. Under uncertainty, the IRR ceases to be uniquely determined even for typical projects (a project is typical if costs precede returns). Under uncertainty, the IRR can take values from a more or less large set of possible values. A key problem is to transform the information about initial parameters into a distribution of the IRR values. Probabilistic methods can be used if quite a number of stringent requirements are met. If an unusual or extraordinary project is considered the probabilistic approach is not sufficiently substantiated. In such cases possibilistic methods and fuzzy set theory seem to be more suitable. The present paper aims to provide a method for evaluating the IRR of investment projects with fuzzy cash flows using the possibility theory. Given a fuzzy cash flow, the IRR is presented as a fuzzy set and the membership function may be considered as a version of distribution. Under the standard addition of fuzzy numbers we give explicit formulas for the membership function of the IRR. If components of a fuzzy cash flow are correlated we use the addition of fuzzy numbers with respect to t-norms. Generally, a possibilistic evaluation of the IRR with respect to a non-standard t-norm is rather difficult and was not considered before. If the t-norm is generated by a convex additive generator we reduce the evaluation of the IRR to a common convex optimization problem. A numerical example is presented. We believe the proposed method can be applied to evaluating the efficiency of investment projects with fuzzy cash flows.

Keywords: investment projects with fuzzy cash flows; fuzzy internal rate of return; possibility distribution; fuzzy variable; triangular norms; adding fuzzy numbers under a triangular norm.

1. ВВЕДЕНИЕ

Характерной чертой инвестиционных проектов в условиях инновационного роста экономики является неопределенность их количественных характеристик. При этом неопределенность имеет, как правило, нестохастический характер. Это связано в первую очередь с уникальностью проектов, отсутствием достаточной статистической информации, необходимой для обоснованных выводов.

Выбор математических инструментов финансового моделирования в условиях неопределенности существенно зависит от природы неопределенности [1–6]. Например, если относительно некоторой величины известен только интервал ее возможных

значений («пессимистические» и «оптимистические» оценки), применяются методы интервального анализа. Если известно вероятностное распределение неопределенной величины внутри интервала ее значений (в этом случае говорят о случайной величине), применяются вероятностные методы. Заметим, что применение вероятностных методов обосновано, только когда выполняется ряд условий, допускающих в определенном смысле «физическую» проверку. Промежуточное положение между интервальными и вероятностными методами занимают методы теории нечетких множеств. В теории нечетких множеств не предполагается, что неопределенная величина подчиняется объективным закономерностям (как

в теории вероятностей), но в то же время на интервале ее значений задано некоторое распределение возможностей, отражающее представления экспертов о большей или меньшей реалистичности в принципе возможных значений. Отказ от предположений о распределении величин внутри интервалов неопределенности при интервальной трактовке может привести к неоправданному росту неопределенности и потере экспертной информации в ходе вычислений. Подходы, основанные на методах теории нечетких множеств и связанных с ними так называемых «мягких вычислениях», позволяют трансформировать оценку возможности исходных данных в оценку возможности результатов. Эти оценки не имеют такой точной интерпретации, как вероятностные, тем не менее они дают полезную информацию для принятия обоснованных решений.

Одним из первых, кто заметил, что в экономике исходные требования теории вероятностей являются слишком жесткими, был Шекли [7]. В частности, по Шекли суммирование «вероятностей», которые экономисты приписывают экономическим событиям, не согласуется с экономическими реалиями. Экономические идеи Шекли находят подтверждение в исследованиях по экономическому поведению [8]. Одна из основных математических интерпретаций идей Шекли состоит в переходе от распределения вероятности к распределению возможностей [5]. В случае денежных потоков это равносильно тому, что платежи рассматриваются не как случайные, а как нечеткие величины.

Одна из первых работ, в которой методы теории нечетких множеств применялись для анализа инвестиционных проектов, была опубликована более четверти века назад [9]. В дальнейшем модели с использованием нечеткости были построены для описания самых разных видов неопределенности, связанных с инвестиционными проектами [1; 10; 11].

Наибольшее число работ посвящено изучению двух наиболее употребительных характеристик проектов: чистому дисконтированному доходу и внутренней норме доходности.

Понятие чистого дисконтированного дохода распространяется на денежные потоки с нечетко определенными денежными величинами достаточно непосредственно. Возникающие здесь сложности носят вычислительный характер.

С переносом понятия внутренней нормы доходности в нечеткую ситуацию дело обстоит несколько сложнее. Ряд работ был специально посвящен изучению внутренней нормы доходности проектов с нечетко определенными параметрами [6; 10; 11]. В соответствии с традиционным определением внутренняя норма доходности вычисляется как решение уравнения $NPV = 0$. В случае нечетких платежей возникает алгебраическое уравнение с нечеткими коэффициентами. Его решение может быть сопряжено со значительными трудностями, в том числе и принципиального характера.

В работе [10] предложен подход к определению внутренней нормы доходности на основе теории возможностей. При таком подходе внутренняя норма доходности оказывается нечеткой переменной IRR с функцией принадлежности $\mu_{IRR}(r) = \mu_{NPV'}(0)$. Доказательство теоремы (3.1) из [10], в которой предпринята попытка установить важные свойства внутренней нормы доходности, содержит неустранимую ошибку (а сама теорема неверна). Тем не менее предложенный подход представляется интересным и многообещающим. В настоящей работе мы, опираясь на принцип обобщения Заде, приводим метод расчета внутренней нормы доходности для инвестиционных проектов с нечетко определенными платежами.

Предложенный подход позволяет учесть зависимость между нечеткими платежами. Без учета зависимости быстрый рост неопределенности (с увеличением числа операций) может обесценить результаты вычислений. Для описания зависимости нечетких величин используются более мягкие средства, чем в теории вероятностей. В математической теории риска для описания многомерных зависимостей получили широкое распространение копулы. Общепринятым для описания зависимостей между нечеткими величинами стал аппарат

треугольных норм (т-норм) — ассоциативных копул. В работе [13] изучался вопрос, при каких условиях не происходит роста неопределенности при вычислении чистого дисконтированного дохода. В настоящей работе т-нормы применяются для моделирования зависимости между нечетко определенными платежами инвестиционного проекта.

2. НЕЧЕТКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Нечеткое подмножество A базового множества X задается своей функцией принадлежности $\mu_A: X \rightarrow [0;1]$. Множество A может трактоваться как свойство элементов базового множества, а величина $\mu_A(x)$ указывает, в какой мере элемент x обладает этим свойством. Пусть A — нечеткое подмножество множества X и α — число из промежутка $[0; 1]$. Множество всех тех x , для которых $\mu_A(x) \geq \alpha$, называется множеством уровня α . Мы будем обозначать его A^α .

Следуя устоявшейся традиции, будем понимать под нечеткой величиной нечеткое подмножество A множества действительных чисел R с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) все уровневые множества A^α являются замкнутыми промежутками вида $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$;
- 2) $\mu_A(a) = 1$ для некоторого a ;
- 3) множество $\{x | \mu_A(x) > 0\}$ ограничено.

Число a , для которого $\mu_A(a) = 1$, называется модальным значением величины A . Закрытие множества $\{x | \mu_A(x) > 0\}$ называется носителем нечеткой величины A и обозначается $\text{supp } A$. Множество $\text{supp } A$ считается множеством нулевого уровня и обозначается также через A^0 .

Элементы носителя — потенциально возможные значения нечеткой величины. Например, граничные значения носителя могут рассматриваться как пессимистические и оптимистические оценки значений нечеткой величины. Допуская некоторое упрощение, можно следующим образом придать содержательное значение и другим уровневым множествам. Предположим, что группа экспертов оценивает возможные

значения некоторой величины. Тогда в уровневое множество A^α попадают те значения, для которых доля экспертов, признавших их возможными, не меньше α . По аналогии с теорией вероятности, говоря о нечетких величинах, мы будем наряду с обозначением $\mu_A(x)$ использовать обозначение $\text{Pos}(A = x)$.

«Обычное» четкое число a , можно рассматривать как нечеткое с носителем, состоящим из единственной точки a и функцией принадлежности μ такой, что $\mu(a) = 1$ и $\mu(x) = 0$ при $x \neq a$.

Нечеткие величины, описываемые выражениями типа «примерно a », обычно представляют так называемыми треугольными нечеткими числами. Треугольное нечеткое число A задается тройкой чисел $(a^L; a; a^R)$ такой, что $a^L \leq a \leq a^R$. Отрезок $[a^L; a^R]$ является носителем множества A , а уровневые множества имеют следующий вид:

$$A^\alpha = [(1-\alpha)a^L + \alpha a; (1-\alpha)a^R + \alpha a].$$

Для треугольных нечетких чисел мы будем использовать обозначение $A = (a^L; a; a^R)$.

Арифметические операции с нечеткими величинами определяются на основе принципа обобщения. Для независимых нечетких величин они сводятся к уровневым интервальным операциям. Например, сумма треугольных нечетких чисел $A = (a^L; a; a^R)$ и $B = (b^L; b; b^R)$ — это треугольное нечеткое число $A+B = (a^L + b^L; a+b; a^R + b^R)$.

Независимость при таком определении проявляется в том, что на каждом уровне допускается реализация экстремальных сценариев сразу для обеих величин. Если, например, возможность пессимистических значений сразу и для A , и для B ниже, чем возможность пессимистических значений для каждой из этих величин по отдельности, нечеткие величины считаются зависимыми.

Для моделирования зависимости между нечеткими величинами применяются так называемые т-нормы. Т-нормой называется бинарная операция (функция двух переменных) $T(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in [0;1]$, монотонная по обоим аргументам и удовлетворяющая следующим условиям:

$T(\alpha, 1) = \alpha$; $T(\alpha, 0) = 0$ (сохранение нуля и единицы);

$T(\alpha, \beta) = T(\beta, \alpha)$ (коммутативность);

$T[T(\alpha, \beta), \gamma] = T[\alpha, T(\beta, \gamma)]$ (ассоциативность)

для любых $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1]$. Характерные примеры т-норм:

$T(\alpha, \beta) = \min(\alpha, \beta)$;

$T(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$;

$T(\alpha, \beta) = \max(0, \alpha + \beta - 1)$.

Ассоциативность позволяет распространить т-норму на любое конечное число аргументов. Мы будем писать $T(\alpha, \beta, \gamma)$ вместо $T(T(\alpha, \beta), \gamma)$ и аналогично в других подобных случаях.

С помощью т-норм можно строить n -мерные нечеткие величины с учетом зависимости между компонентами. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — нечеткие величины. Нечеткое подмножество A пространства R^n с функцией принадлежности $\mu_A(x_1, \dots, x_n) = T[\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)]$ называется декартовым произведением нечетких величин $A_1, \dots, A_n$ и задает аналог совместного распределения в теории вероятностей. Величина $\mu_A(x_1, \dots, x_n)$ оценивает возможность того, что величины $A_1, \dots, A_n$ примут соответственно значения $x_1, \dots, x_n$, т.е. $\mu_A(x_1, \dots, x_n) = \text{Pos}(A_1 = x_1, \dots, A_n = x_n)$.

Пусть A — n -мерная нечеткая величина и f — функция n переменных. Образ A относительно f в соответствии с принципом обобщения определяется как нечеткая величина $f(A)$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{f(A)}(y) = \max\{\mu_A(x) \mid f(x) = y\}.$$

В частности, если f — суммирование, получаем:

$$\mu_{A_1 + \dots + A_n}(y) = \max\{T[\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)] \mid x_1 + \dots + x_n = y\}.$$

Величина в левой части трактуется как оценка возможности того, что значение суммы заданных нечетких величин окажется равным y с учетом зависимости между слагаемыми. Сумма относительно т-нормы $\min(\alpha, \beta)$ соответствует независимым (не взаимодействующим) нечетким величинам. Суммирование относительно т-нормы $\alpha \cdot \beta$ дает эффект, схожий с эффектом диверсификации при суммировании независимых случайных величин. Суммирование относительно т-нормы $\max(0, \alpha + \beta - 1)$ предполагает, что экстремальные значения сразу для нескольких слагаемых невозможны. Пусть, например, $A = (1; 2; 3)$, $B = (2; 3; 4)$. Тогда при сложении относительно т-нормы $\min(\alpha, \beta)$ на уровне 0,5 получается промежуток $[4; 6]$, при сложении относительно т-нормы $\alpha \cdot \beta$ — промежуток $[4,41; 5,59]$, а при сложении относительно т-нормы $\max(0, \alpha + \beta - 1)$ — промежуток $[4,5; 5,5]$.

Как правило, для моделирования зависимости между нечеткими величинами используются параметризованные семейства т-норм, где параметр служит оценкой зависимости.

Существует простой и достаточно универсальный способ получения т-норм с помощью аддитивных генераторов. Пусть $g: [0; 1] \rightarrow [0; +\infty]$ — непрерывная убывающая функция, такая, что $g(1) = 0$. Обозначим через $g^{(-)}(y)$ квазиобратную функцию, совпадающую с обратной к функции $g(x)$ на промежутке $[0; g(0)]$, и тождественно равную нулю на промежутке $[g(0); +\infty]$. Тогда функция

$$T(\alpha, \beta) = g^{(-)}[g(\alpha) + g(\beta)] \quad (1)$$

является т-нормой. Выбирая параметризованное семейство генераторов, можно получить параметризованное семейство т-норм. Рассмотрим, например, часто используемое семейство генераторов Франка:

$$g_s(\alpha) = -\ln\left(\frac{s^\alpha - 1}{s - 1}\right), \quad s > 0, s \neq 1. \quad (2)$$

Оно порождает семейство т-норм

$$T_s(\alpha, \beta) = \log_s \left[1 + \frac{(s^\alpha - 1)(s^\beta - 1)}{s - 1} \right]. \quad (3)$$

При $s \rightarrow 0$ т-норма $T_s(\alpha, \beta)$ стремится к $\min(\alpha, \beta)$, при $s \rightarrow 1$ — к $\alpha \cdot \beta$, а при $s \rightarrow +\infty$ — к $\max(0, \alpha + \beta - 1)$. Выбирая подходящее значение параметра s , можно при суммировании нечетких величин учесть их зависимость.

Для сравнения нечетких величин используются многочисленные методы в зависимости от специфики решаемой задачи. Широкое распространение получили индексы, основанные на мерах возможности и необходимости. Возможность отношения $A \leq B$ оценивается числом

$Pos(A \leq B) = \sup\{\min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \mid x \leq y; x, y \in R\}$, необходимость — числом

$Nec(A \leq B) = \inf\{\sup\{\max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)] \mid x \leq y; y \in R\} \mid x \in R\}$.

Для треугольных чисел $A = (a^L; a; a^R)$ и $B = (b^L; b; b^R)$ соотношение $Pos(A \leq B) \geq \alpha$ имеет место тогда и только тогда, когда $a^L(\alpha) \leq b^R(\alpha)$, а соотношение $Nec(A \leq B) \geq \alpha$ — тогда и только тогда, когда $a^R(1 - \alpha) \leq b^L(1 - \alpha)$. В частности, $Pos(A \leq B) = 1$, если $a \leq b$, и $Pos(A \leq B) = \mu_A(b)$, если $b \leq a$.

3. ВНУТРЕННЯЯ НОРМА ДОХОДНОСТИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ С НЕЧЕТКО ОПРЕДЕЛЕННЫМ ДЕНЕЖНЫМ ПОТОКОМ

Будем считать, что инвестиционный проект продолжительности n временных периодов задается потоком платежей

$$CF = (a_0, a_1, \dots, a_n), \quad (4)$$

каждая компонента которого a_i при $i \geq 1$ представляет собой баланс инвестиционных затрат и чистого дохода за период i , актуализированный на конец этого периода, а $|a_0|$ — объем начальных инвестиций. Говорят, что проект, заданный потоком платежей (4) типичный, если все платежи, за исключением начального (инвестиционного), неотрицательны.

Более формально типичный проект задается потоком платежей вида (4), в котором $a_0 < 0$, $a_i \geq 0$ при всех $i \geq 1$ и $a_n > 0$. Мы будем дополнительно предполагать, что типичный проект не убыточен:

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n > 0.$$

Величина

$$NPV(r) = a_0 + \frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{a_n}{(1+r)^n}$$

называется чистым приведенным доходом проекта (4) относительно ставки приведения r . В случае типичного проекта непрерывная функция $NPV(r)$, убывающая, меняет знак с плюса на минус на промежутке $(0; 1)$. Значение r , для которого $NPV(r) = 0$, называют внутренней нормой доходности

(сокращенно — ВНД или IRR). В случае типичных проектов внутренняя норма доходности является одним из критериев эффективности проектов: проект с более высокой внутренней нормой более эффективен.

При оценке проектов в условиях неопределенности значения a_i из (4) могут определяться неоднозначно. В этом случае речь идет о количественной оценке степени возможности тех или иных сценариев. В случае стохастической неопределенности могут быть оценены вероятности тех или иных сценариев, и тогда значения a_i оказываются случайными величинами. Однако многие проекты в определенном смысле уникальны и применение вероятностных методов при их оценке может оказаться необоснованным. В этих случаях значения a_i приходится трактовать как нечеткие.

Пусть $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ — последовательность нечетких величин, соответствующих платежам, отнесенным к моментам времени $t = 0, 1, 2, \dots, n$. Если выполняются аксиомы рационального поведения (монотонность, согласованность, независимость от дополнительных проектов и др., см. [1]), оценка эффективности проектов, рассматриваемая как отображение из R^{n+1} в R , имеет вид

$$v^r(x) = x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+r)^n}. \quad (5)$$

В соответствии с принципом обобщения образ A относительно отображения $v^r(x)$ из (5) — это нечеткое подмножество $NPV^r(A)$ в R с функцией принадлежности

$$\mu_{NPV^r(A)}(w) = \sup\{\mu_A(x) \mid x \in R^{n+1}, v^r(x) = w\}.$$

Из формулы (5) следует, что

$$NPV^r(A) = A_0 + \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A_n}{(1+r)^n}. \quad (6)$$

Для инвестиционного проекта с нечетко определенными платежами внутренняя норма доходности также определена нечетко. Обозначим через $IRR(A)$ нечеткое множество возможных значений внутренней нормы доходности. Естественно считать, что

$$Pos(IRR(A) = r) = Pos(NPV^r(A) = 0). \quad (7)$$

Следовательно,

$$\mu_{IRR(A)}(r) = \mu_{NPV^r(A)}(0). \quad (8)$$

Разберем два случая в зависимости от того, относительно какой т-нормы выполняется суммирование в (6): стандартное суммирование нечетких величин относительно т-нормы $\min(\alpha, \beta)$; суммирование относительно т-нормы, порожденной аддитивным генератором.

СТАНДАРТНОЕ СУММИРОВАНИЕ

В соответствии с (8) имеем

$$\mu_{IRR(A)}(r) = \sup_{x \in R^{n+1}} \{\min\{\mu_{A_0}(x_0), \mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\} \mid v^r(x) = 0\}.$$

Далее будем предполагать, что все нечеткие величины $A_i, i = 0, 1, \dots, n$, являются треугольными нечеткими числами:

$$A_i = (a_i^L; a_i; a_i^R), i = 0, 1, \dots, n.$$

Положим

$$a^L = (a_i^L)_{i=0,\dots,n}, a = (a_i)_{i=0,\dots,n}, a^R = (a_i^R)_{i=0,\dots,n}.$$

В соответствии с (6) $NPV^r(A)$ как стандартная сумма треугольных нечетких чисел является треугольным нечетким числом:

$$NPV^r(A) = [v^r(a^L), v^r(a), v^r(a^R)]. \quad (9)$$

Значение r принадлежит α -срезу нечеткого множества $IRR(A)$, если $v^r(x) = 0$ для некоторого $x \in \mathbf{R}^{n+1}$, такого, что $\mu_{A_i}(x_i) \geq \alpha$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.

В силу монотонности функции $v^r(x)$ по x значение r принадлежит α -срезу нечеткого множества $IRR(A)$, если

$$v^r[a^L + \alpha(a - a^L)] \leq 0 \text{ и } v^r[a^R + \alpha(a - a^R)] \geq 0.$$

Максимальное значение α , для которого r принадлежит α -срезу $IRR(A)$, равно значению функции принадлежности $\mu_{IRR(A)}(r)$ и получается следующим образом:

если значения $v^r(a^L)$ и $v^r(a^R)$ одного знака, $\mu_{IRR(A)}(r) = 0$;

$$\text{если } v^r(a) \leq 0 \text{ и } v^r(a) \geq 0, \text{ то } \mu_{IRR(A)}(r) = \frac{-v^r(a^L)}{v^r(a) - v^r(a^L)};$$

$$\text{если } v^r(a) \leq 0 \text{ и } v^r(a^R) \geq 0, \text{ то } \mu_{IRR(A)}(r) = \frac{v^r(a^R)}{v^r(a^R) - v^r(a)}.$$

Если последовательность платежей удовлетворяет условию Норстрема (кумулятивная последовательность нетто-сумм меняет знак только один раз), можно показать, что нечеткое множество $IRR(A)$ является нечеткой величиной [14].

Пример 1. Рассмотрим проект со следующими нечеткими платежами:

$$A_0 = (-1010, -1000, -990);$$

$$A_1 = (670, 700, 730);$$

$$A_2 = (750, 800, 850).$$

Если ограничиться интервальными оценками, мы придем к выводу, что внутренняя норма доходности находится в промежутке от 25,50 до 36,59%. На рис. 1 представлен график функции принадлежности нечеткой внутренней нормы доходности $\mu_{IRR}(r)$ с модальным значением 31,05%.

Так как нечеткое значение внутренней нормы доходности получено по принципу обобщения, нечеткая внутренняя норма доходности удовлетворяет требованиям, предъявляемым к оценке эффективности проекта из [2], в их нечеткой интерпретации. Дефазификация (переход к четкой оценке) может быть проведена в соответствии с рекомендациями из [1] и [2]. Пусть

$$IRR^\alpha = [irr_1(\alpha), irr_2(\alpha)].$$

В простейшем случае можно выбрать приемлемый «уровень доверия» α и на этом уровне использовать критерий Гурвица:

$$irr = \lambda \cdot irr_1(\alpha) + (1 - \lambda) \cdot irr_2(\alpha),$$

где λ — параметр «оптимизма — пессимизма».

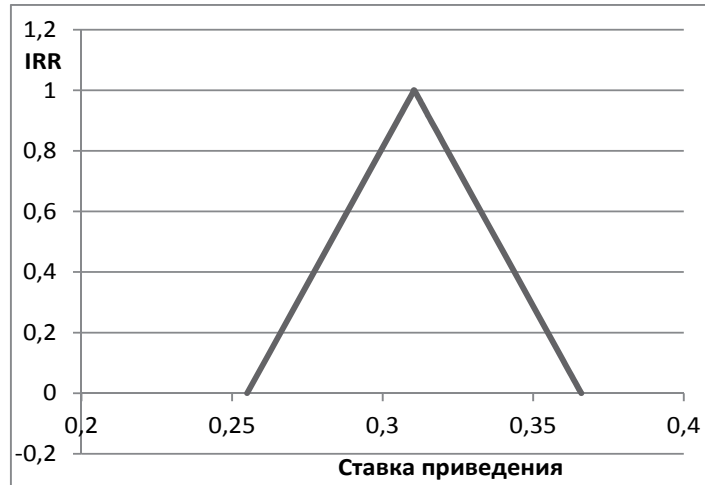


Рис. 1. Функция принадлежности IRR относительно стандартной т-нормы

Можно рандомизировать уровни, приписав значениям α «субъективные вероятности» и вычисляя математическое ожидание:

$$irr = M_{\alpha} [\lambda \cdot irr_1(\alpha) + (1 - \lambda) \cdot irr_2(\alpha)].$$

СУММИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО Т-НОРМЫ, ПОРОЖДЕННОЙ АДДИТИВНЫМ ГЕНЕРАТОРОМ

Комбинируя (8) и определение суммирования относительно т-нормы T , получаем

$$\mu_{IRR(A)}(r) = \sup_{x \in R^{n+1}} \{T\{\mu_{A_0}(x_0), \mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\} \mid v^r(x) = 0\}.$$

Пусть g — аддитивный генератор т-нормы T . Тогда

$$\mu_{IRR(A)}(r) = \sup_{x \in R^{n+1}} \{g^{(-)}[g(\mu_{A_0}(x_0))] + \dots + g[\mu_{A_n}(x_n)] \mid v^r(x) = 0\}.$$

Учитывая монотонность аддитивного генератора, предыдущую формулу можно переписать следующим образом:

$$\mu_{IRR(A)}(r) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^n g[\mu_{A_i}(x_i)] \mid v^r(x) = 0 \right\}. \quad (10)$$

Далее будем предполагать, что все платежи являются треугольными нечеткими числами, и воспользуемся введенными ранее обозначениями.

Если $v^r(a^L) \leq 0$ и $v^r(a) \geq 0$, нетрудно показать, что минимальное значение (10) достигается при таком x , для которого $x_i \in [a_i^L; a_i]$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Положим

$$\alpha_i = \mu_{A_i}(x_i), \quad d_i = a_i - a_i^L \quad \text{и} \quad k_i = \frac{d_i}{(1+r)^i}.$$

Тогда $x_i = a_i^L + \alpha_i d_i$ и условие $v^r(x) = 0$ принимает следующий вид:

$$v^r(a^L) + \sum_{i=0}^n k_i \alpha_i = 0. \quad (11)$$

Будем считать, что аддитивный генератор g является выпуклой функцией. В этом случае вычисление $\mu_{IRR(A)}(r)$ сводится к задаче выпуклого программирования:

найти $\min \sum_{i=0}^n g(\alpha_i)$ при выполнении (11) и (12), ограничениях $0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 0, 1, \dots, n$.

В общем случае эта оптимизационная задача может быть решена с использованием численных методов.

Пример 2. Найдем функцию принадлежности внутренней нормы доходности $\mu(r)$ денежного потока из примера 1 относительно т-нормы $T(\alpha, \beta) = \alpha \beta$.

Если $v^r(a^L)$ и $v^r(a^R)$ одного знака, то $\mu(r) = 0$. Вычислим значение функции принадлежности для тех значений r , для которых

$$v^r(a^L) \leq 0, v^r(a) \geq 0. \quad (13)$$

В этом случае оптимизационная задача (12) для заданного значения r приобретает следующий вид:

$$-\ln \alpha_0 - \ln \alpha_1 - \ln \alpha_2 \rightarrow \min;$$

$$k_0 \alpha_0 + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = V(r);$$

$$0 \leq \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \leq 1,$$

$$\text{где } k_0 = 10; k_1 = \frac{30}{1+r}; k_2 = \frac{50}{(1+r)^2}; V = -1010 + \frac{670}{1+r} + \frac{750}{(1+r)^2}.$$

Применяя теорему Куна–Таккера, приходим к системе уравнений

$$-\frac{1}{\alpha_i} - \lambda_i + \lambda k_i = 0; \lambda_i (1 - \alpha_i) = 0; \lambda \geq 0; \sum_{i=0}^n k_i \alpha_i = V.$$

Условия (13) выполняются при значениях r , лежащих в промежутке от $r_1 = 25,50\%$ до $r_2 = 31,05\%$. В этом промежутке $k_0 < k_1 < k_2$. Промежуток $[r_1; r_2]$ разбивается точками $r_3 = 28,11\%$ и $r_4 = 30,48\%$ на три промежутка. На этих промежутках $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и $\mu(r)$ определяются следующим образом:

$$\text{если } r_1 \leq r \leq r_3, \text{ то } \alpha_i = \frac{|V|}{3k_i}, i = 0, 1, 2, \text{ и } \mu(r) = \frac{|V|^3}{27k_0 k_1 k_2};$$

$$\text{если } r_3 \leq r \leq r_4, \text{ то } \alpha_0 = 1, \alpha_i = \frac{|V| - k_0}{2k_i}, i = 1, 2, \text{ и } \mu(r) = \frac{(|V| - k_0)^2}{2k_1 k_2};$$

$$\text{если } r_4 \leq r \leq r_2, \text{ то } \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{|V| - k_0 - k_1}{k_2}$$

$$\text{и } \mu(r) = \frac{|V| - k_0 - k_1}{k_2}.$$

Аналогичным образом $\mu(r)$ вычисляется для тех значений r , для которых $v^r(a) \leq 0, v^r(a^R) \geq 0$. График функции принадлежности $\mu(r)$ приведен на рис. 2.

Рассмотрим случай, когда нечеткие платежи представлены треугольными нечеткими числами, причем определены на своих временных горизонтах с одной и той же относительной погрешностью, которая меняется вместе со ставкой приведения.

Более точно, пусть $i = 0, 1, \dots, n$, при этом $d_i = d(1+r)^i$. Тогда в предыдущих обозначениях $k_i = d$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Решение оптимизационной задачи (12) при условии (13) получается, когда

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{|v^r(a^L)|}{(n+1)d}.$$

При этом

$$\mu_{IRR(A)}(r) = g^{(-)} \left[(n+1)g \left(\frac{|v^r(a^L)|}{(n+1)d} \right) \right]. \quad (14)$$

Аналогично, если $v^r(a) \leq 0$, $v^r(a^R) \geq 0$, то

$$\mu_{IRR(A)}(r) = g^{(-)} \left[(n+1)g \left(\frac{v^r(a^R)}{(n+1)d} \right) \right]. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) справедливы, в частности, для генераторов семейства Франка $g_s(\alpha)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен комплекс вопросов, связанных с оценкой и выбором инновационных проектов в условиях, когда денежные потоки определены нечетко. Основой исследования служит теория возможностей. Приведен способ вычисления внутренней нормы доходности инвестиционного проекта с нечетким денежным потоком. Предложен подход к учету зависимости между нечеткими компонентами денежного потока, основанный на использовании т-норм. Показано, что учет зависимости нечетких компонент позволяет снизить неопределенность при вычислении внутренней нормы доходности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов. М.: Дело, 2002. 888 с.
2. Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (теория ожидаемого эффекта). М.: Наука, 2012. 158 с.
3. Buckley J.J., Eslami E., Feuring T.F. Fuzzy Mathematics in Economics and Engi-

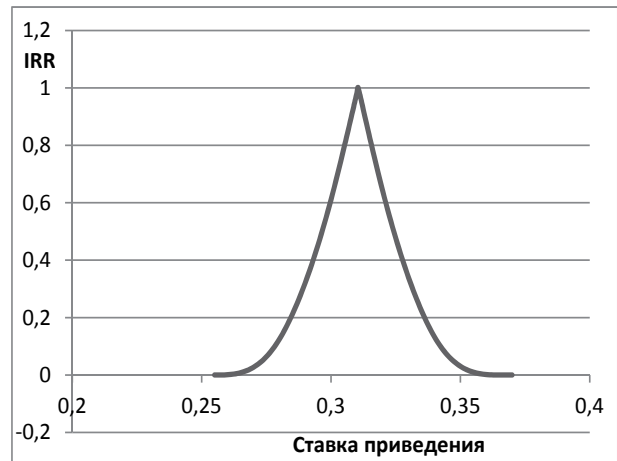


Рис. 2. Функция принадлежности IRR относительно т-нормы $T(\alpha, \beta) = \alpha\beta$

neering. Heidelberg; New York: Physica-Verlag, 2002. 272 p.

4. Chen S.-H., Wang P.P. (Eds.) Computational Intelligence in Economics and Finance. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2002. 480 p.
5. Dubois D., Prade H. Possibility theory and its application: Where do we stand// *Mathware and Soft Computing*. 2011. Vol. 18 (1). Pp. 18–31.
6. Dymowa L. Soft Computing in Economics and Finance. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 296 p.
7. Shackle G.L.S. Decision, Order and Time in Human Affairs. Cambridge University Press, 1969 (2nd ed.). 330 p.
8. Magni C.A. Reasoning the «net-present-value» way: Some biases and how to use psychology for falsifying decision models. URL: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1673371 (дата обращения: 04.01.2014).
9. Buckley J.J. The Fuzzy Mathematics of Finance// *Fuzzy Sets and Systems*. 1987. Vol. 21. Pp. 257–273.
10. Carlsson C., Fuller R. Capital Budgeting Problems with Fuzzy Cash Flows// *Mathware & Soft Computing*. 1999. Vol. 6. Pp. 81–89.
11. Kuchta D. Optimization with Fuzzy Present Worth Analysis and Applications. In: Kahraman C. (Ed.) Fuzzy Engineering Economics with Applications. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. Pp. 43–70.

12. *Sewastjanov P., Dymowa L.* On the Fuzzy Internal Rate of Return. In: *Kahraman C.* (Ed.) *Fuzzy Engineering Economics with Applications*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. Pp. 243–288.
13. *Волкова Е.С., Гусин В.Б.* Оценка проектов с нечетко определенными денежными потоками // *Экономические науки*. 2013. № 4 (101). С. 147–150.
14. *Волкова Е.С., Гусин В.Б.* Внутренняя норма доходности денежных потоков с нечетко определенными платежами// *Oeconomia, Aerarium, Jus*. 2012. № 3 (04). С. 30–34.

REFERENCES

1. *Vilensky P.L., Livshits V.N., Smolyak S.A.* Evaluating the Investment Project Effectiveness. Moscow: Delo Publishers, 2002, 888 p. (*in Russian*).
2. *Volkova E.S., Gisin V.B.* The IRR for Fuzzy Cash Flows // *Oeconomia, Aerarium, Jus*. 2012, no. 3 (04), pp. 30–34 (*in Russian*).
3. *Volkova E.S., Gisin V.B.* Evaluation of Fuzzy Cash Flow Projects // *Ekonomicheskie Nauki (Economic Sciences)*, 2013, no. 4 (101), pp. 147–150 (*in Russian*).
4. *Smolyak S.A.* The Investment Project Evaluation under Risk and Uncertainty (The Expected Effect Theory). Moscow: Nauka, 2012, 158 p. (*in Russian*).
5. *Buckley J.J.* The Fuzzy Mathematics of Finance. *Fuzzy Sets and Systems*. 1987, vol. 21, pp. 257–273.
6. *Buckley J.J., Eslami E., Feuring T.F.* Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering. Heidelberg; New York: Physica-Verlag, 2002, 272 p.
7. *Carlsson C., Fuller R.* Capital Budgeting Problems with Fuzzy Cash Flows. *Mathware & Soft Computing*. 1999, vol. 6, pp. 81–89.
8. *Chen S. — H., Wang P.P.* (Eds.) *Computational Intelligence in Economics and Finance*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2002. 480 p.
9. *Dubois D., H Prade H.* Possibility Theory and Its Application: Where Do We Stand. *Mathware and Soft Computing*, 2011, vol. 18 (1), pp. 18–31.
10. *Dymowa L.* *Soft Computing in Economics and Finance*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 296 p.
11. *Kuchta D.* Optimization with Fuzzy Present Worth Analysis and Applications. In: *Kahraman C.* (Ed.) *Fuzzy Engineering Economics with Applications*. — Berlin; Heidelberg: Springer. 2008, pp. 43–70.
12. *Magni C.A.* Reasoning the «Net-Present-Value» Way: Some Biases and How to Use Psychology for Falsifying Decision Models. URL: [http:// papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1673371](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1673371) (accessed date: 04.01.2014).
13. *Sewastjanov P., Dymowa L.* On the Fuzzy Internal Rate of Return. In: *Kahraman C.* (Ed.) *Fuzzy Engineering Economics with Applications*. Berlin; Heidelberg: Springer. 2008. pp. 243–288.
14. *Shackle, G.L.S.* *Decision, Order and Time in Human Affairs*. Cambridge University Press, 1969 (2nd ed.). 330 p.

НОВОСТИ ЭКОНОМИКИ

В Астраханской области компанией ЗАО «АФБ» было открыто крупнейшее за последние 20 лет месторождение нефти и газа на суше. Оно было названо «Великим». Но ЗАО «АФБ» не собирается самостоятельно его разрабатывать. Руководством компании было принято решение о привлечении партнера из нефтяного бизнеса. Речь идет о крупных компаниях, таких как «Газпром», «Роснефть» и другие. Приблизительный запас месторождения составляет порядка 300 млн тонн. По словам руководителя астраханской компании, государство должно внести данное месторождение в специальный перечень федерального учета. После чего будет разработан порядок и график разработки.

Источник: <http://news-world.info/economics/274-osvoenie-velikogo-mestorozhdeniya.html>